Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Exame - 25 de Janeiro de 2010

LMAC, MEBiom e MEFT

Duração: 3 horas

Apresente os cálculos

1. Determine o raio de convergência da série de potências de z dada por (1)

$$1 + z + z^2 + z^4 + z^8 + \ldots + z^{2^n} + \ldots .$$

2. Sejam μ, $l > 0$. Considere a equação diferencial

$$u'''' = \mu^4 u.$$

a) Determine a sua solução geral. (2)

b) Determine as soluções não triviais da equação diferencial que satisfazem (1)

$$u(0) = u''(0) = u(l) = u''(l) = 0.$$

3. Seja $a > 0$. Considere a equação diferencial ordinária escalar de primeira ordem

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + w^2}. \qquad (1)$$

a) Determine a solução geral de (1). (2)

Nota: $\frac{d}{dw}\frac{1}{2}\left(w\sqrt{1+w^2} + \operatorname{arcsinh} w\right) = \sqrt{1+w^2}$ e $\frac{d}{dw}\operatorname{arcsinh} w = \frac{1}{\sqrt{1+w^2}}$.

Considere agora a equação diferencial ordinária escalar de segunda ordem

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \qquad (2)$$

que descreve as catenárias.

b) Determine a solução geral de (2). (1)

4. Calcule (2)

$$\int_{|z|=1} z^2 \sin\frac{1}{z}\, dz,$$

com a circunferência descrita no sentido directo. Justifique e classifique as singularidades da função integranda.

5. Considere um anel circular, isolado, e de secção com área muito pequena, de modo a que o anel se confunde com a circunferência centrada na origem que tem raio igual a 1.

Seja $u(\theta, t)$, com $(\theta, t) \in]-\infty, +\infty[\times[0, +\infty[$, a temperatura do ponto com coordenada polar θ no instante t. A temperatura do anel satisfaz

$$\begin{cases} u_t = \alpha u_{\theta\theta} & \text{para } (\theta, t) \in [-\pi, \pi] \times [0, \infty[, \\ u(-\pi, t) = u(\pi, t) & \text{para } t \in [0, +\infty[, \\ u_\theta(-\pi, t) = u_\theta(\pi, t) & \text{para } t \in [0, +\infty[, \\ u(\theta, 0) = u_0(\theta) & \text{para } \theta \in [-\pi, \pi]. \end{cases} \tag{3}$$

Aqui α é uma constante positiva e u_0 é a temperatura inicial do anel. Por definição, uma solução de (3) é uma função u pertencente ao espaço

$$\mathcal{A}_{\text{per}} := \left\{ u \in C^1([-\pi, \pi] \times [0, +\infty[) : u_{\theta\theta} \text{ existe e } u_{\theta\theta} \in C^0([-\pi, \pi] \times [0, +\infty[) \right\}$$

que satisfaz (3).

a) Determine as condições de compatibilidade para (3). (1)

b) Para cada t fixo, com $t \geq 0$, desenvolva a função u em série de Fourier e use o resultado para determinar formalmente uma solução de (3). (2)

c) Determine u no caso em que $u_0(\theta) = \sin^2 \theta$. Nota: $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))$. (1)

6. Sejam f e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^1, satisfazendo $f(0) = g(0)$, $f'(0) = g'(0)$ e $|f'(t)| = |g'(t)| \neq 0$, para todo o $t \in \mathbb{R}$. As funções f e g representam parametricamente duas curvas, $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, respectivamente. Seja $t_0 \in \mathbb{R}$ fixo. Considere a transformação $\mathcal{L}_{t_0}$ de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$, definida por

$$z \longmapsto \mathcal{L}_{t_0}(z) = f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{g'(t_0)}[z - g(t_0)].$$

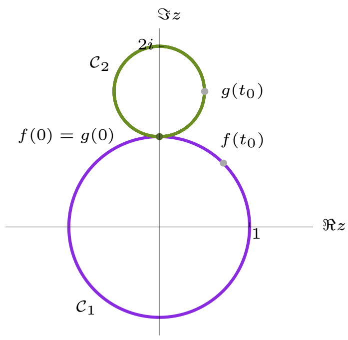

Ilustração das hipóteses do problema no *caso particular* em que $f(t) = ie^{-it}$ e $g(t) = \frac{i}{2}(3 - e^{2it})$.

a) Caracterize a transformação $\mathcal{L}_{t_0}$ tendo em conta que $|f'(t_0)| = |g'(t_0)| \neq 0$. (1)

b) Calcule $\mathcal{L}_{t_0}(g(t_0))$ e um vector tangente a $\mathcal{L}_{t_0}(\mathcal{C}_2)$ em $\mathcal{L}_{t_0}(g(t_0))$. (2)

c) Quando t varia de 0 a t_0, relacione o comprimento percorrido sobre $\mathcal{C}_1$, entre $f(0)$ e $f(t_0)$, com o comprimento percorrido sobre $\mathcal{C}_2$, entre $g(0)$ e $g(t_0)$. Justifique. (1)

d) Interprete os resultados das alíneas anteriores explicando como evolui a curva $\mathcal{L}_t(\mathcal{C}_2)$ com t. (2)

e) Suponha que $f(t) = t + i(1 - \cosh t)$ e $g(t) = \sinh t$. Determine a curva representada parametricamente por $t \mapsto \mathcal{L}_t(i)$. (1)