Análise Complexa e Equações Diferenciais

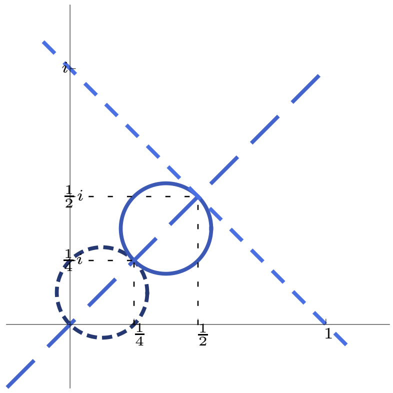
2º Exame - 29 de Janeiro de 2009

LEAmb, LEMat, MEBiol e MEQ

Duração: 3 horas

Apresente os cálculos

1. Determine geometricamente a imagem por $z \mapsto \frac{1}{z}$ das duas rectas e das duas circunferências representadas na figura. Tenha o cuidado de indicar a distância à origem de pontos notáveis. (3)



2. Considere a função $f : \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re z < 2\pi,\ 0 < \Im z < 2\pi\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(x+iy) = (x + \sin y) + i(y - \sin x).$$

a) Estude a diferenciabilidade de f. Calcule a derivada de f. (1)

b) Represente no plano complexo os conjuntos $\{f(x+iy_0) : x \in]0, 2\pi[\}$, para $y_0 = \frac{\pi}{2}$ e $y_0 = \pi$, e $\{f(x_0+iy) : y \in]0, 2\pi[\}$, para $x_0 = \pi$. (1)

c) Represente $f_x(x_0+iy_0)$ e $f_y(x_0+iy_0)$ nos pontos $x_0+iy_0 = \pi + i\frac{\pi}{2}$ e $x_0+iy_0 = \pi + i\pi$. Interprete os resultados. (1)

3. Calcule $\int_{\pi}^{i\pi} \left(\frac{1}{z} + e^{iz}\right) dz$, onde o integral é calculado sobre uma curva contida no primeiro quadrante aberto. Simplifique o resultado obtido. (1)

4. Considere a função $z \mapsto \frac{1}{(z^2-1)^2}$.

a) Calcule o seu desenvolvimento em série de Laurent em torno do ponto 1. Classifique a singularidade $z = 1$. (2)

b) Calcule $\int_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2-1)^2}\, dz$, onde a circunferência é percorrida no sentido directo. Justifique. (1)

5. Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

a) Determine a sua solução geral. (2)
b) Esboce o seu retrato de fase. (1)

6. Considere a equação diferencial ordinária

$$y' = ty^2.$$

a) Esboce o seu campo de direcções e os gráficos das soluções. (1)
b) Determine a solução que satisfaz $y(0) = y_0$. (2)
c) Determine o intervalo máximo de existência das soluções. (1)

7. Seja $l > 0$. Considere $y \in C^2[0, l]$ com valores em $\mathbb{C}$, não identicamente nula e tal que

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y, & (*) \\ y(0) = y(l) = 0, & (**) \end{cases}$$

para um certo $\lambda \in \mathbb{C}$. Seja $z : [-l, l] \to \mathbb{C}$ a extensão ímpar de y.

a) Usando o facto de y satisfazer $(**)$, e sem usar $(*)$, prove que z é de classe C^1. (1)
b) Calcule o desenvolvimento em série de Fourier de z, atendendo apenas a que z é ímpar. (1)
c) Use o resultado da alínea anterior e $(*)$ para determinar y. Se possível determine λ. Justifique. (1)