Análise Complexa e Equações Diferenciais

Exame - 30 de Janeiro de 2017

LEMat e MEAer

Soluções

1. $\{z \in \mathbb{C} : \left|z + \frac{11}{2}\right| > \frac{9}{2} \text{ e } \left|z - 5\right| > 3\}$.

2.

$$f_x = i\sqrt{y^2-1}\,e^{ix}, \qquad f_y = \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}e^{ix}.$$

$$f_x = -if_y \iff y = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$$f'\Big(x - i\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big) = i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}e^{ix}.$$

3.

$$\mathrm{Res}_{z=i}\, f(z) = \frac{i}{4}, \qquad \mathrm{Res}_{z=5i}\, f(z) = -\frac{5i}{4}.$$

O integral vale 2π. Note-se que

$$\left|\int_{\substack{|z|=R\\ \Im z>0}} \frac{12z^2}{(1+z^2)(25+z^2)}\,dz\right| \leq \frac{12R^2}{(R^2-1)(R^2-25)}\pi R,$$

para $R > 5$.

4.

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z-a_i},$$

desde que z não seja uma raiz de p. Seja z_0 um zero de p'. Se z_0 coincide com um dos a_i's, digamos $z_0 = a_j$, então $l_j = 1$ os restantes l_i's são nulos, obviamente z_0 está contido no invólucro convexo das raízes de p. Suponhamos que z_0 é diferente de todos os a_i's. Então, tem-se

$$0 = \frac{p'(z_0)}{p(z_0)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_0 - a_i}.$$

Daqui tira-se sucessivamente

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{z}_0 - \overline{a}_i}{|z_0 - a_i|^2} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{z_0}{|z_0 - a_i|^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{|z_0 - a_i|^2},$$

$$z_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{1}{|z_0-a_i|^2}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|z_0-a_j|^2}} a_i.$$

Portanto, $z_0 = \sum_{i=1}^{n} l_i a_i$, onde

$$0 < l_i = \frac{\frac{1}{|z_0-a_i|^2}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|z_0-a_j|^2}} < 1$$

e $\sum_{i=1}^{n} l_i = 1$.

5. A equação é separável, sendo a sua forma canónica

$$e^{-5y} y' = e^{-4t} + t.$$

A solução é

$$y = -\frac{1}{5} \ln \left(\frac{5}{4} e^{-4t} - \frac{5}{2} t^2 - \frac{1}{4} \right).$$

6. A equação escreve-se

$$(D+2)(D-3)y = e^{-2t} + 1.$$

O aniquilador do segundo membro é $D(D+2)$. A solução geral é

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t} - \frac{1}{6} - \frac{1}{5} t e^{-2t}.$$

7.

$$u(x,y) = d_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} [d_n \sinh(ny) \cos(nx)],$$

$$d_n = \frac{2}{\pi \sinh(2n\pi)} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

para $n > 0$,

$$d_0 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\pi} f(x)\, dx.$$

8.

a)

$$e^{\alpha A} = \begin{bmatrix} e^{\alpha} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad e^{\beta B} = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Seja

$$C = \alpha A + s\beta B = \begin{bmatrix} \alpha & s\beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então

$$C^2 = \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha s\beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C^3 = \begin{bmatrix} \alpha^3 & \alpha^2 s\beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C^n = \begin{bmatrix} \alpha^n & \alpha^{n-1} s\beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} e^C &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n}{n!} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} & s\beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{n-1}}{n!} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{\alpha} & s\beta \frac{e^{\alpha}-1}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$e^{\alpha A} e^{\beta B} = \begin{bmatrix} e^{\alpha} & \beta e^{\alpha} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Conclui-se que $e^{\alpha A} e^{\beta B} = e^{\alpha A + s\beta B}$ se verifica quando

$$s \frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha} = e^{\alpha} \iff s = \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha}}.$$