Análise Complexa e Equações Diferenciais

Exame - 22 de Janeiro de 2021

MEAer

Resolução

1. *Versão melhorada do Teorema de Cauchy:* Seja Ω um aberto simplesmente conexo, $a \in \Omega$, e f holomorfa em $\Omega \setminus a$ tal que $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$. Se $\mathcal{C}$ é uma curva fechada em $\Omega \setminus a$, tem-se $\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = 0$.

Fórmula Integral de Cauchy: Seja Ω um aberto simplesmente conexo e f holomorfa em Ω. Seja $a \in \Omega$ e $\mathcal{C}$ uma curva fechada em Ω que não passe por a. Então,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i n(\mathcal{C}, a)} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-a}\,dz,$$

onde $n(\mathcal{C}, a)$ é o índice de $\mathcal{C}$ em relação ao ponto a.

Prova da Fórmula Integral de Cauchy: Uma vez que

$$\lim_{z\to a}\left[(z-a)\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right] = 0,$$

a versão melhorada do Teorema de Cauchy implica que

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad f(a)\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-a}\,dz = \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-a}\,dz \\ &\Leftrightarrow \quad 2\pi i n(\mathcal{C}, a) f(a) = \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-a}\,dz.\end{aligned}$$

2. Sabemos que $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$. Uma vez que a base de $L^2(-\pi, \pi)$ formada por

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \ldots\}$$

é ortogonal, a função constante $\frac{1}{2}$ é ortogonal a qualquer dos elementos de $\{\sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x)\}$. Portanto, a projecção de $\cos^2 x$ no espaço gerado por $\{\sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x)\}$ é $\frac{1}{2}\cos(2x)$.

3. Sejam y e z duas soluções do problema de valor inicial, e seja $w = z - y$. A função w satisfaz

$$\begin{aligned} w' &= f(t,z) - f(t,y) = f(t, y + s(z-y))|_{s=0}^{s=1} \\ &= w\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(t, y + s(z-y))\,ds \\ &= a(t)\,w, \\ w(t_0) &= 0, \end{aligned}$$

onde $a(t) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t) + s(z(t) - y(t)))\, ds$. Logo, tem-se

$$w(t) = w(t_0)e^{\int_{t_0}^t a(\tau)\, d\tau} = 0,$$

ou seja, $y(t) = z(t)$.

4. Seja u a diferença de duas soluções do problema. Então, u satisfaz a equação do calor com condição inicial nula, $u(\,\cdot\,, 0) = 0$, e condições fronteira de Dirichlet homogéneas, $u(0, \cdot\,) = u(l, \cdot\,) = 0$. Define-se a função $E : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,t)\, dx.$$

De acordo com a Regra de Leibniz, a sua derivada é

$$\begin{aligned} E' &= \int_0^l u u_t\, dx = \int_0^l u u_{xx}\, dx \\ &= u(l,t)u_x(l,t) - u(0,t)u_x(0,t) - \int_0^l u_x^2\, dx \\ &= -\int_0^l u_x^2\, dx \leq 0. \end{aligned}$$

Usou-se integração por partes, $u(0,t) = u(l,t) = 0$, e o facto de u satisfazer a equação do calor. Note-se que a função E é não negativa e que $E(0) = 0$ porque $u(\,\cdot\,, 0) = 0$. Uma vez que E é não crescente, E é identicamente nula. Como u é uma função contínua, então $u(\,\cdot\,, t) \equiv 0$, qualquer que seja $t \geq 0$. Assim, u é identicamente nula. Recordando que u designa a diferença de duas soluções do problema, conclui-se que o problema tem, no máximo, uma solução.

5. Escrevendo z na forma polar, $z = re^{i\theta}$, tem-se

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(re^{i\theta}) &= \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} [(a_n + ib_n)r^n e^{in\theta}] \\ &= \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} [(a_n + ib_n)r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n[a_n\cos(n\theta) - b_n\sin(n\theta)] \end{aligned}$$

Isto implica que

$$\begin{aligned} r^n a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{Re} f(z))\cos(n\theta)\, d\theta, \\ -r^n b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{Re} f(z))\sin(n\theta)\, d\theta. \end{aligned}$$

Para $n > \lfloor \lambda \rfloor$, tem-se

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \frac{C(1+r^{\lfloor \lambda \rfloor})}{\pi r^n} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos(n\theta)|\, d\theta = \frac{4C(1+r^{\lfloor \lambda \rfloor})}{\pi r^n} \to 0, \\ |b_n| &\leq \frac{C(1+r^{\lfloor \lambda \rfloor})}{\pi r^n} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(n\theta)|\, d\theta = \frac{4C(1+r^{\lfloor \lambda \rfloor})}{\pi r^n} \to 0, \end{aligned}$$

quando $r \to +\infty$. Conclui-se que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\lfloor \lambda \rfloor} (a_n + ib_n) z^n.$$