Análise Complexa e Equações Diferenciais

Exame - 29 de Janeiro de 2018

MEC

Resolução

1. A imagem da região $\left\{z \in \mathbb{C} : \Re z < 0 \text{ e } -\frac{3\pi}{8} < \Im z < -\frac{\pi}{8}\right\}$ por $z \mapsto e^{2z}$ é

$$\left\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1 \text{ e } -\frac{3\pi}{4} < \arg z < -\frac{\pi}{4}\right\}.$$

2. A função é descontínua no eixo real negativo. As derivadas parciais de f são

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{3} r^{-2/3} e^{\frac{i\theta^2}{2\pi}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{i\theta}{\pi} \sqrt[3]{r} e^{\frac{i\theta^2}{2\pi}}.$$

Como estas funções são contínuas em $S := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \Im z = 0 \text{ e } \Re z \leq 0\}$, f é $\mathbb{R}$-diferenciável em S. A equação de Cauchy-Riemann é satisfeita se

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{i}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \iff \frac{1}{3} r^{-2/3} e^{\frac{i\theta^2}{2\pi}} = \frac{\theta}{\pi} r^{-2/3} e^{\frac{i\theta^2}{2\pi}} \iff \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Logo, f é diferenciável em $\left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \arg z = \frac{\pi}{3}\right\}$. A derivada de f é

$$f'\big(re^{\frac{i\pi}{3}}\big) = e^{-\frac{i\pi}{3}} \frac{\partial f}{\partial r}\big(re^{\frac{i\pi}{3}}\big) = e^{-\frac{i\pi}{3}} \frac{1}{3} r^{-2/3} e^{\frac{i\pi^2}{18\pi}} = \frac{1}{3} r^{-2/3} e^{-\frac{5i\pi}{18}}.$$

3.

$$\begin{aligned}
\int_0^{i\pi} z\cos z\,dz &= z\sin z\big|_0^{i\pi} - \int_0^{i\pi} \sin z\,dz = i\pi\sin(i\pi) + \cos z\big|_0^{i\pi} \\
&= \pi\frac{e^{-\pi} - e^{\pi}}{2} + \frac{e^{-\pi} + e^{\pi}}{2} - 1 \\
&= (-\pi\sinh(\pi) + \cosh\pi - 1).
\end{aligned}$$

4. Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{-2i, 2i\} \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+2^2)^2} = \frac{z^2}{(z+2i)^2(z-2i)^2}$. Tem-se,

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-2i)^2}, \text{ com } g(z) = \frac{z^2}{(z+2i)^2}.$$

A função g é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{-2i\}$. Seja $R > 2$ e $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \Im z = 0 \wedge |z| \leq R\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0 \wedge |z| = R\}$. Pela Fórmula Integral de Cauchy,

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)\,dz &= \int_\gamma \frac{g(z)}{(z-2i)^2}\,dz = 2\pi i g'(2i) = 2\pi i \left[\frac{4iz(z+2i)}{(z+2i)^4}\right]_{z=2i} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{2^5 i^3}{2^8} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\pi}{4} = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{|z|=R \wedge \Im z>0} f(z)\,dz. \quad (*)$$

O cálculo seguinte mostra que o integral ao longo da semi-circunferência tende para zero quando $R \to +\infty$:

$$\begin{aligned} \left|\int_{|z|=R\wedge \Im z>0} f(z)\,dz\right| &\leq \int_{|z|=R\wedge\Im z>0} \frac{R^2}{(R^2-2^2)^2}|dz| \\ &= \frac{\pi R^3}{(R^2-2^2)^2} \to 0 \text{ quando } R \to +\infty. \end{aligned}$$

Tomando o limite em ambos os membros de $(*)$ quando $R \to +\infty$, conclui-se que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+2^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

5. Usando a fórmula integral de Cauchy para $f^n(0)$,

$$f^n(0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz.$$

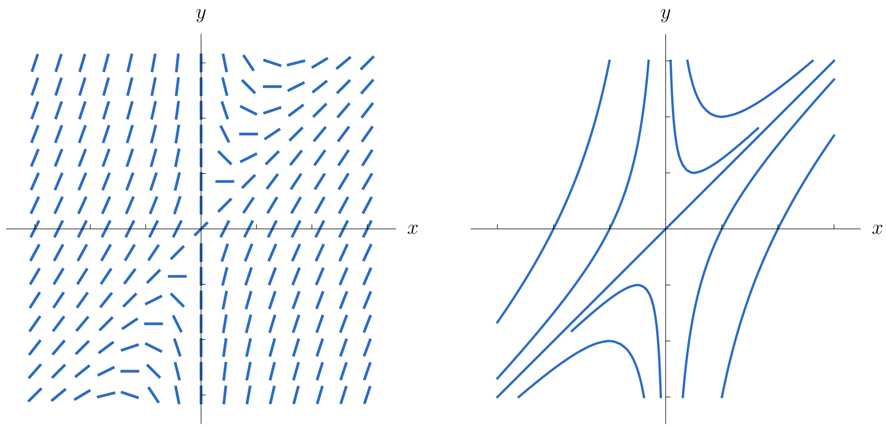
Daqui tira-se que

$$|f^n(0)| \leq \frac{n!}{2\pi}\int_{|z|=R}\frac{|z|}{|z|^{n+1}}\,|dz| = \frac{n!}{2\pi R^n}\int_{|z|=R}|dz| = \frac{n!}{R^{n-1}}.$$

Se $n \geq 2$, o majorante de $|f^n(0)|$ tende para zero quando $n \to \infty$. Logo, $f^n(0) = 0$ para $n \geq 2$. Usando a fórmula de Taylor para f em torno de 0, que neste caso é válida em $\mathbb{C}$ porque f é inteira, $f(z) = f(0) + f'(0)z$. Como $|f(0)| = 0$, $f(z) = cz$ para algum c com módulo não superior a 1.

6.

a) Sobre as rectas de declive m que passam na origem, $y = mx$, os gráficos das soluções têm declive $y' = 2 - m$. Assim, $(m = 0 \Rightarrow y' = 2)$, $(m = 1 \Rightarrow y' = 1)$, $(m = 2 \Rightarrow y' = 0)$, $(m = 3 \Rightarrow y' = -1)$, $(m = -1 \Rightarrow y' = 3)$, por exemplo. O campo de direcções e os gráficos das soluções estão esboçados nas figuras seguintes.



b) A equação é linear, com forma canónica

$$y' + \frac{y}{x} = 2.$$

O factor integrante é x. Multiplicando ambos os membros da equação diferencial pelo factor integrante, obtém-se

$$xy' + y = 2x.$$

O primeiro membro é a derivada do produto do factor integrante por y,

$$(xy)' = 2x.$$

Integrando ambos os membros de 0 a x e usando a condição inicial, obtém-se

$$y = x - \frac{1}{x}.$$

7. Multiplicando ambos os membros da equação diferencial por $\mu(x)$, vem

$$\mu(x)(e^{-6y} + e^{6y}) + \mu(x)(-2e^{-6y} + 2e^{6y})y' = 0.$$

Para que esta equação seja exacta, deve ter-se

$$\mu(x)(-6e^{-6y} + 6e^{6y}) = \mu'(x)(-2e^{-6y} + 2e^{6y})$$

ou, equivalentemente, $\mu'(x) = 3\mu(x)$. Daqui deduz-se que o factor integrante é $\mu(x) = e^{3x}$. Logo, a equação dada é equivalente à seguinte equação exacta:

$$(e^{3x-6y} + e^{3x+6y}) + (-2e^{3x-6y} + 2e^{3x+6y})y' = 0.$$

Esta equação tem como solução geral

$$e^{3x-6y} + e^{3x+6y} = c.$$

A solução que satisfaz $y(0) = 1$ corresponde a $c = e^{-6} + e^6$.

8. Considere-se o prolongamento par de f ao intervalo $[-\pi, 0]$ e periódico, de período 2π. Os coeficientes de Fourier de f são, para $n > 0$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \;=\; \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{2}{n\pi}x\sin(nx)\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n^2\pi}\cos(nx)\Big|_0^{\pi} \;=\; \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1] \\ &= \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi} & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ 0 & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases} \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Portanto, para $x \in [0, \pi]$,

$$f(x) = x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} + \ldots\right).$$

9.

a) Prolongamos a função u a $[-\pi, \pi] \times [0, \infty[$ como função ímpar de x porque as condições fronteira são de Dirichlet homogéneas. Para cada $t \geq 0$ fixo, a função u pode ser desenvolvida em série de Fourier. Os coeficientes dependerão de t. Como a função é ímpar de x,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin(nx).$$

As condições fronteira estão formalmente satisfeitas. Substituindo na equação diferencial

$$u_t = \frac{1}{1+t}u_{xx} \;\Leftrightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t)\sin(nx) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+t}b_n(t)n^2\sin(nx).$$

Por unicidade dos coeficientes de Fourier, para todo o n,

$$b_n'(t) = -\frac{n^2}{1+t}b_n(t).$$

Logo,

$$b_n(t) = c_n e^{-\int \frac{n^2}{1+t}\,dt} = \frac{c_n}{(1+t)^{n^2}}$$

e
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(1+t)^{n^2}} \sin(nx).$$
Falta garantir a condição inicial
$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx) = \sin(x) + 5\sin(3x).$$
Conclui-se que $c_1 = 1$, $c_3 = 5$ e os restantes c_n's são nulos. A solução é
$$u(x,t) = \frac{\sin(x)}{1+t} + \frac{5\sin(3x)}{(1+t)^9}.$$

b) Neste caso a solução é solução é
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(1+t)^{n^2}} \sin(nx).$$

Logo,
$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} u^2(x,t)\,dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{|c_n|^2}{(1+t)^{2n^2}} \int_0^{\pi} \sin^2(nx)\,dx \right] \\
&= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{(1+t)^{2n^2}} \\
&\leq \frac{1}{(1+t)^2} \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \\
&= \frac{1}{(1+t)^2} \frac{\pi\alpha}{2}.
\end{aligned}$$