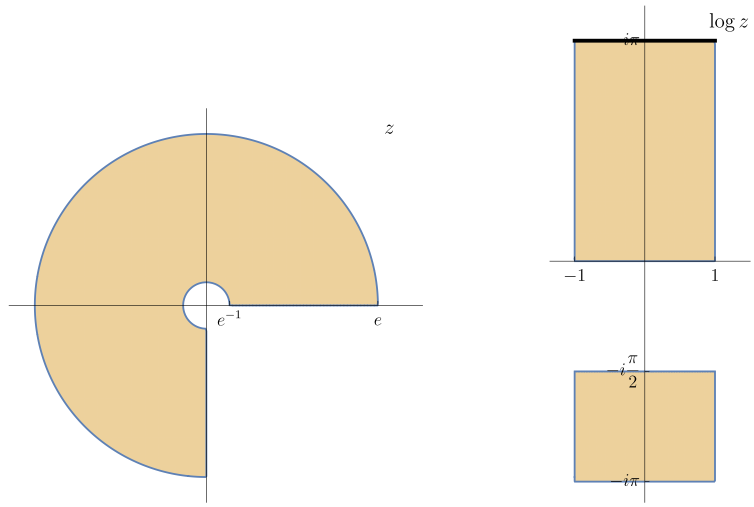
Análise Complexa e Equações Diferenciais

Exame - 25 de Janeiro de 2016

LEGM e MEC

Resolução

1. $\log(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta$, com $\theta \in]-\pi, \pi]$.



2. As derivadas parciais de f são $f_r = \frac{1}{r}$ e $f_\theta = i\sin\theta$. Uma vez estas derivadas parciais são contínuas, f é $\mathbb{R}$-diferenciável. Logo, f é diferenciável nos pontos em que satisfizer a equação de Cauchy-Riemann:

$$f_r = -\frac{i}{r} f_\theta \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{r} = \frac{\sin\theta}{r} \;\Leftrightarrow\; \sin\theta = 1 \;\Leftrightarrow\; \theta = \frac{\pi}{2}.$$

A função é diferenciável nos pontos pertencentes ao eixo imaginário positivo. Nestes pontos $f'(re^{i\frac{\pi}{2}}) = e^{-i\theta}\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} f_r(re^{i\frac{\pi}{2}}) = -\frac{i}{r}$.

3.

a)

$$\begin{aligned}
\int_0^i z^2 e^{\pi z}\, dz &= \left.\frac{z^2 e^{\pi z}}{\pi}\right|_0^i - \frac{2}{\pi}\int_0^i z e^{\pi z}\, dz \\
&= \frac{1}{\pi} - \left.\frac{2z e^{\pi z}}{\pi^2}\right|_0^i + \frac{2}{\pi^2}\int_0^i e^{\pi z}\, dz \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{2i}{\pi^2} + \left.\frac{2}{\pi^3} e^{\pi z}\right|_0^i \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{2i}{\pi^2} - \frac{4}{\pi^3}.
\end{aligned}$$

b) A semi-circunferência é parametrizada por $z(\theta) = 2e^{i\theta}$, com $\theta \in [0, \pi]$. Tem-se $\overline{z(\theta)} = 2e^{-i\theta}$, $1/\overline{z(\theta)} = e^{i\theta}/2$ e $z'(\theta) = 2ie^{i\theta}$. Portanto,

$$\int_C \frac{1}{\overline{z}}\, dz = \int_0^\pi ie^{2i\theta}\, d\theta = \left.\frac{e^{2i\theta}}{2}\right|_0^\pi = 0.$$

c) Uma vez que $e^w = \sum_{n=0}^\infty \frac{w^n}{n!}$ para todo o w, tem-se

$$z^3 e^{\frac{3}{z}} = z^3 \sum_{n=0}^\infty \frac{3^n}{n! z^n} = \sum_{n=0}^\infty \frac{3^n}{n! z^{n-3}}$$

para todo o z diferente de 0. A singularidade $z = 0$ é essencial. O resíduo da função no ponto 0 é $\frac{3^4}{4!}$.

4. Como $\cos(x) = \Re e^{ix}$, vem

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(x)}{x^2+4}\, dx = \Re \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x^2+4}\, dx = \Re \int_{\mathbb{R}+i0} \frac{e^{iz}}{z^2+4}\, dz = \Re \lim_{R\to\infty} \int_{\substack{|z|<R,\\ \Im z=0}} \frac{e^{iz}}{z^2+4}\, dz.$$

Seja $R > 2$. Usando a Fórmula Integral de Cauchy, com $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \Re z = 0 \text{ e } \Im z \leq -2\}$, $a = 2i$ e $f(z) = e^{iz}/(z+2i)$,

$$\begin{aligned}\int_{\partial\{z\in\mathbb{C}:\Im z>0 \text{ e } |z|<R\}} \frac{e^{iz}}{z^2+4}\, dz &= \int_{\partial\{z\in\mathbb{C}:\Im z>0 \text{ e } |z|<R\}} \frac{e^{iz}/(z+2i)}{z-2i}\, dz \\ &= 2\pi i \left.\frac{e^{iz}}{z+2i}\right|_{z=2i} = \frac{\pi e^{-2}}{2}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\substack{|z|<R,\\ \Im z=0}} \frac{e^{iz}}{z^2+4}\, dz + \int_{\substack{|z|=R,\\ \Im z>0}} \frac{e^{iz}}{z^2+4}\, dz = \frac{\pi e^{-2}}{2}. \qquad (1)$$

Usando $|e^{iz}| = |e^{ix-y}| = e^{-y}$, e $e^{-y} \leq 1$ para $y \geq 0$, vem

$$\begin{aligned}\left|\int_{\substack{|z|=R,\\ \Im z>0}} \frac{e^{iz}}{z^2+4}\, dz\right| &\leq \int_{\substack{|z|=R,\\ \Im z>0}} \left|\frac{e^{iz}}{z^2+4}\right| |dz| \\ &\leq \int_{\substack{|z|=R,\\ \Im z>0}} \frac{e^{-y}}{||z^2|-4|}\, |dz| \\ &\leq \frac{1}{R^2-4} \int_{\substack{|z|=R,\\ \Im z>0}} |dz| \\ &= \frac{\pi R}{R^2-4} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } R\to\infty.\end{aligned}$$

Calculando o limite em ambos os membros de (1) quando $R \to \infty$, obtém-se

$$\int_{\mathbb{R}+i0} \frac{e^{iz}}{z^2+4}\,dz = \frac{\pi e^{-2}}{2}.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(x)}{x^2+4}\,dx = \Re\left(\frac{\pi e^{-2}}{2}\right) = \frac{\pi e^{-2}}{2}.$$

5. Seja f diferenciável no ponto a. Existe o limite

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}.$$

Escolhendo $z = a + (h + i0)$ com $h \in \mathbb{R}$, vem

$$f'(a) = \lim_{\substack{h\to 0,\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(a).$$

Por outro lado, escolhendo $z = a + (0 + ih)$ com $h \in \mathbb{R}$, vem

$$f'(a) = \lim_{\substack{h\to 0,\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(a+ih)-f(a)}{ih} = -i \lim_{\substack{h\to 0,\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(a+ih)-f(a)}{h} = -i\frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

6.

a) A equação é separável sendo a sua forma canónica

$$\frac{1}{y^2+1}y' = \tan t.$$

Como $\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \arctan y$ e $\int \tan t\,dt = \int \frac{\sin t}{\cos t}\,dt = -\ln|\cos t|$, a equação diferencial pode ser reescrita na forma

$$\frac{d}{dy}\arctan y \frac{dy}{dt} = -\frac{d}{dt}\ln|\cos t|$$

ou, usando a derivada da função composta,

$$\frac{d}{dt}\arctan y = -\frac{d}{dt}\ln|\cos t|.$$

Primitivando ambos os membros em ordem a t, vem

$$\arctan y(t) = -\ln|\cos t| + c.$$

Substituindo t por 0 e usando a condição inicial $y(0) = 1$, obtém-se $c = \frac{\pi}{4}$. Logo,

$$y(t) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \ln|\cos t|\right).$$

Mas o coseno nunca pode atingir 0 porque o logaritmo de zero não está definido. Como em $t = 0$ é positivo, o coseno é sempre positivo para t pertencente ao domínio da solução. Assim,

$$y(t) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \ln\cos t\right).$$

b) Em $t = 0$, $-\ln\cos t$ vale zero. Quando t se afasta de 0, $\cos t$ fica menor do que 1 e $-\ln\cos t$ fica positivo. Quando $-\ln\cos t$ tender para $\frac{\pi}{4}$, o argumento da tangente tende para $\frac{\pi}{2}$ e $y(\cdot)$ tende para $+\infty$. Ora,

$$-\ln\cos t = \frac{\pi}{4} \;\Leftrightarrow\; \cos t = e^{-\frac{\pi}{4}}.$$

Portanto, o maior intervalo contendo 0 onde $-\ln\cos t$ é menor do que $\frac{\pi}{4}$ é o intervalo

$$\left]-\arccos e^{-\frac{\pi}{4}}, \arccos e^{-\frac{\pi}{4}}\right[,$$

que corresponde ao domínio máximo de existência da solução.

7. Multiplicando ambos os membros da equação por $\mu(x^2y)$, obtém-se

$$\mu(x^2y)(5y + 5y^2) + \mu(x^2y)(3x + 4xy)y' = 0.$$

Para que esta equação seja exacta deve ter-se

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x^2y)(5y + 5y^2)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x^2y)(3x + 4xy)],$$

ou

$$\begin{aligned}\mu'(x^2y)x^2(5y + 5y^2) &+ \mu(x^2y)(5 + 10y) \\ &= \mu'(x^2y)2xy(3x + 4xy) + \mu(x^2y)(3 + 4y).\end{aligned}$$

Esta equação é equivalente a

$$\mu'(x^2y)x^2y(1 + 3y) = \mu'(x^2y)(x^2y + 3x^2y^2) = \mu(x^2y)2(1 + 3y),$$

ou

$$x^2y\mu'(x^2y) = 2\mu(x^2y),$$

isto é,

$$s\mu'(s) = 2\mu(s),$$

onde $s = x^2y$. Portanto, $\mu(s) = s^2 = x^4y^2$ é factor integrante da equação dada. A equação

$$(5x^4y^3 + 5x^4y^4) + (3x^5y^2 + 4x^5y^3)y' = 0$$

é exacta. Um potencial do campo $(5x^4y^3 + 5x^4y^4, 3x^5y^2 + 4x^5y^3)$ é $\phi = x^5y^3 + x^5y^4$. As soluções satisfazem

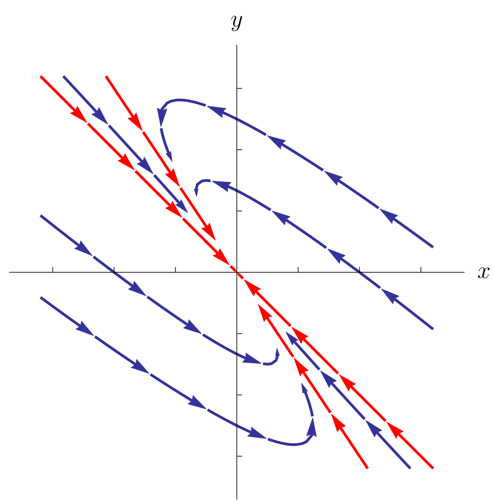
$$\phi = x^5y^3 + x^5y^4 = \text{constante}.$$

8.

a)

$$X(t) = (-x_0 - y_0)e^{-t}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} + (3x_0 + 2y_0)e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

b) Para t muito grande e $x_0 + y_0 \neq 0$, como $e^{-2t} \ll e^{-t}$, tem-se $X(t) \approx (-x_0-y_0)e^{-t}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, o que implica que as trajectórias (com $x_0+y_0 \neq 0$) tendem para zero tangentes a $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$.



9. Faz-se o prolongamento de u a $[-\pi, \pi] \times [0, \infty[$ como função ímpar em x e, a seguir, faz-se o prolongamento de u a $]-\infty, +\infty[\times[0, \infty[$ como função periódica em x, de período 2π. Para cada t fixo com $t \geq 0$, a função $u(\,\cdot\,, t)$

pode ser desenvolvida em série de Fourier. Os coeficientes da série dependerão de t. Vem

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin(nx).$$

Se u é desta forma, então satisfaz, formalmente, as condições fronteira.

Para que u satisfaça a equação diferencial, deve ter-se

$$u_{tt} = u_{xx} \;\Leftrightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} b_n''(t)\sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 b_n(t)\sin(nx).$$

Os coeficientes de Fourier ficam univocamente determinados pela função que representam, logo

$$b_n''(t) = -n^2 b_n(t),$$

para todo o $n \in \mathbb{N}_1$. Chega-se a

$$b_n(t) = c_n\cos(nt) + \frac{d_n}{n}\sin(nt),$$

com c_n e d_n constantes. Estes resultados conduzem a

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n\cos(nt) + \frac{d_n}{n}\sin(nt)\right]\sin(nx). \tag{2}$$

Resta garantir as condições iniciais. Escolhendo $t = 0$ em (2), obtém-se

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\sin(nx) = u_0(x)$$

e, derivando ambos os membros de (2) formalmente em ordem a t e escolhendo $t = 0$, chega-se a

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n\sin(nx) = \sin(2x).$$

As constantes c_n são os coeficientes de Fourier do prolongamento ímpar de u_0 e as constantes d_n são os coeficientes de Fourier de $\sin(2x)$. Assim,

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_0(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_0(x)\sin(nx)\,dx, \tag{3}$$

$d_2 = 1$ e os outros d_ns anulam-se. A solução formal é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos(nt)\sin(nx) + \frac{1}{2}\sin(2t)\sin(2x).$$

com os coeficientes c_n dados por (3).