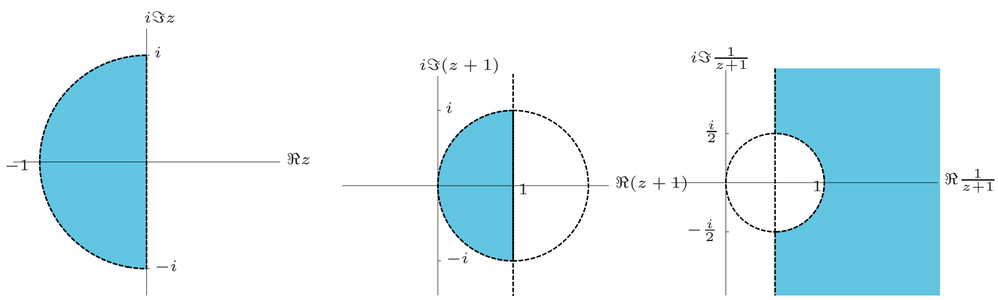
Análise Complexa e Equações Diferenciais

Exame - 27 de Janeiro de 2014

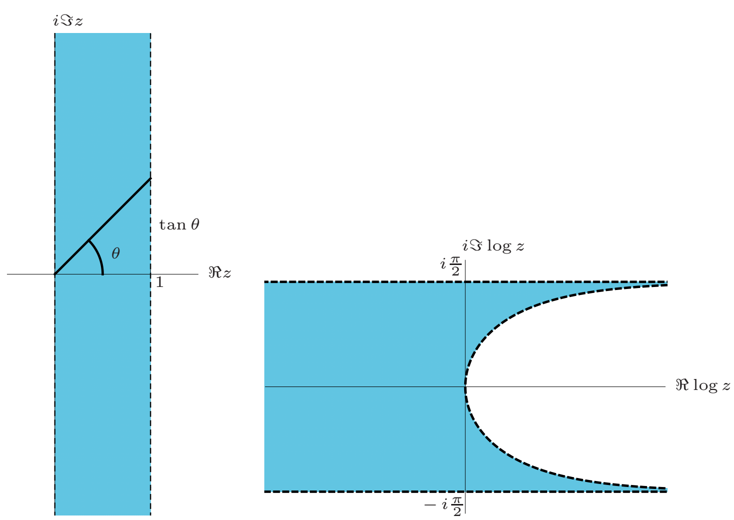
LEGM e MEC

Resolução

1.



2. O comprimento do segmento a preto na figura da esquerda é $\sqrt{1+\tan^2\theta} = \sec\theta$. A recta $\Re z = 1$ é parametrizada por $\theta \mapsto \sec\theta e^{i\theta}$, com $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. A curva na figura da direita é parametrizada por $\theta \mapsto \ln\sec\theta + i\theta$, com $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.



3. A função é descontínua no eixo real negativo e é contínua em $S := \mathbb{C}\setminus\{z \in \mathbb{C} : \Re z \leq 0 \text{ e } \Im z = 0\}$. No conjunto S, as derivadas parciais de f valem $f_r = \frac{2}{r^3}$ e $f_\theta = i$. Como estas derivadas parciais são contínuas, f é $\mathbb{R}$-diferenciável em S. A equação de Cauchy-Riemann, $f_r = -\frac{i}{r}f_\theta$, é satisfeita se

$\frac{2}{r^3} = \frac{1}{r}$, isto é, quando $r = \sqrt{2}$. Portanto, f é diferenciável na circunferência de raio $\sqrt{2}$ centrada na origem, com o ponto $-\sqrt{2}$ removido. A derivada de f vale $f'(\sqrt{2}e^{i\theta}) = e^{-i\theta}f_r(\sqrt{2}e^{i\theta}) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\theta}$ para $-\pi < \theta < \pi$.

4.

a) $\int_0^{2+i} \frac{1}{(z-2)^3}\, dz = -\frac{1}{2(z-2)^2}\Big|_0^{2+i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$.

b) L é parametrizada por $t \mapsto 1 + t(1+i\pi)$ com $t \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}\int_L e^{\overline{z}}\, dz &= \int_0^1 e^{1+t(1-i\pi)}(1+i\pi)\, dt = \frac{1+i\pi}{1-i\pi}e^{1+t(1-i\pi)}\Big|_0^1 \\ &= -\frac{e(e+1)}{1+\pi^2}(1-\pi^2+2\pi i).\end{aligned}$$

c) $\int_{|z-\pi|=\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\frac{\pi}{z}}}{z-\pi}\, dz = 2\pi i e$.

d)

$$\frac{1}{z-\pi} = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{1-\frac{z}{\pi}} = -\frac{1}{\pi} - \frac{z}{\pi^2} - \frac{z^2}{\pi^3} - \frac{z^3}{\pi^4} - \dots, \tag{1}$$

válido para $|z| < \pi$.

e)

$$e^{\frac{\pi}{z}} = 1 + \frac{\pi}{z} + \frac{\pi^2}{2!z^2} + \frac{\pi^3}{3!z^3} + \dots, \tag{2}$$

válido para $z \neq 0$. Os termos em $\frac{1}{z}$ do produto de (1) por (2) são

$$-\frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots\right) = -\frac{e-1}{z}.$$

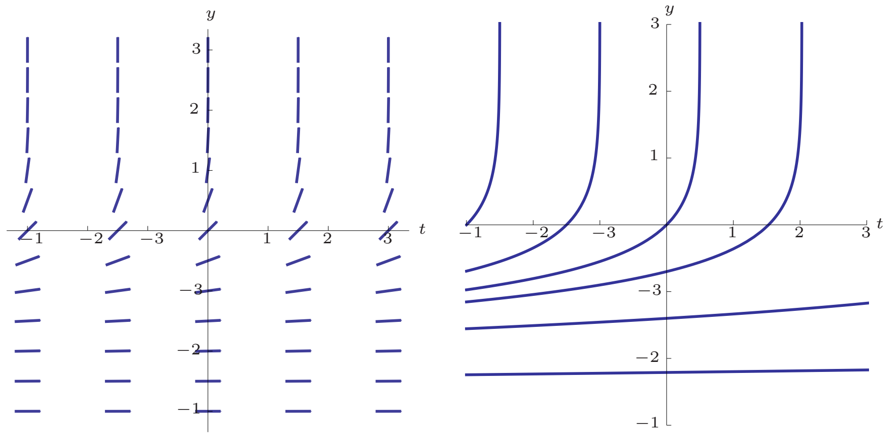
Portanto,

$$\int_{|z|=\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\frac{\pi}{z}}}{z-\pi}\, dz = -2\pi i(e-1).$$

A singularidade $z = 0$ é essencial.

5.

a)



b) A equação é separável. A forma canónica é

$$e^{-2y}y' = 1.$$

Usando a derivada da função composta, vem

$$\left(-\frac{1}{2}e^{-2y}\right)' = 1.$$

Integrando ambos os membros de 0 a t, obtém-se

$$-\frac{1}{2}e^{-2y} + \frac{1}{2}e^{-2y_0} = t.$$

Resolvendo para y, chega-se a

$$y = -\frac{1}{2}\ln\left(e^{-2y_0} - 2t\right).$$

A solução está definida para $t < \frac{1}{2}e^{-2y_0}$.

6. Multiplicando ambos os membros da equação por $\mu(x+y)$, obtém-se

$$\mu(x+y)(2e^{-x} + 3e^{-y}) + \mu(x+y)(3e^{-x} + 2e^{-y})y' = 0.$$

para que esta equação seja exacta deve ter-se

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x+y)(2e^{-x} + 3e^{-y})] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x+y)(3e^{-x} + 2e^{-y})],$$

ou

$$\mu'(x+y)(2e^{-x}+3e^{-y})+\mu(x+y)(-3e^{-y})$$
$$=\mu'(x+y)(3e^{-x}+2e^{-y})+\mu(x+y)(-3e^{-x}).$$

Esta equação é equivalente a

$$\mu'(x+y)(e^{-y}-e^{-x})=\mu(x+y)(3e^{-y}-3e^{-x}),$$

isto é,

$$\mu'(s)=3\mu(s),$$

onde $s=x+y$. Portanto, $\mu(s)=e^{3s}=e^{3x+3y}$ é factor integrante da equação dada. A equação

$$(2e^{2x+3y}+3e^{3x+2y})+(3e^{2x+3y}+2e^{3x+2y})y'=0$$

é exacta. Um potencial do campo $(2e^{2x+3y}+3e^{3x+2y}, 3e^{2x+3y}+2e^{3x+2y})$ é $\phi=e^{2x+3y}+e^{3x+2y}$. As soluções satisfazem

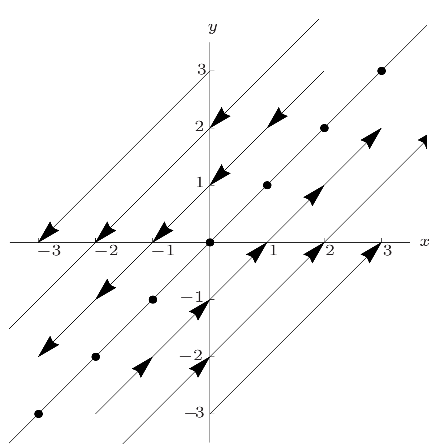
$$\phi=e^{2x+3y}+e^{3x+2y}=\text{constante}.$$

7.

a)

$$A=\begin{bmatrix}1&-1\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&-1\end{bmatrix},$$
$$e^{At}=Se^{Jt}S^{-1}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&t\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&-1\end{bmatrix}.$$

b)



8.

a) A forma canónica da equação diferencial é

$$b'_n(t) + n^2 b_n(t) = f_n(t).$$

Um factor integrante é $e^{n^2 t}$. Multiplicando ambos os membros da equação diferencial pelo factor integrante, obtém-se

$$e^{n^2 t} b'_n(t) + e^{n^2 t} n^2 b_n(t) = e^{n^2 t} f_n(t).$$

Reconhece-se no primeiro membro a derivada do factor integrante multiplicado por $b_n(t)$:

$$(e^{n^2 t} b_n(t))' = e^{n^2 t} f_n(t).$$

Finalmente, integram-se ambos os membros de 0 a t:

$$e^{n^2 t} b_n(t) - b_n(0) = \int_0^t e^{n^2 s} f_n(s)\, ds,$$

ou seja,

$$b_n(t) = c_n e^{-n^2 t} + \int_0^t e^{-n^2(t-s)} f_n(s)\, ds.$$

b) Prolonga-se a solução como função ímpar em x e periódica em x, de período 2π. Para cada t fixo, desenvolve-se o prolongamento em série de Fourier:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(nx).$$

Substituindo esta expressão para u na equação diferencial parcial, obtém-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} b'_n(t) \sin(nx) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n(t) \sin(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin(nx).$$

Por unicidade dos coeficientes de Fourier, para cada $n \in \mathbb{N}_1$,

$$b'_n(t) = -n^2 b_n(t) + f_n(t).$$

As soluções destas equações diferenciais ordinárias foram obtidas na alínea anterior. Elas conduzem a

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{-n^2 t} + \int_0^t e^{-n^2(t-s)} f_n(s)\, ds \right] \sin(nx). \tag{3}$$

Substituindo t por zero, vem

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx).$$

Para que esta função coincida com a função u_0, os coeficientes c_n devem ser dados por

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_0(x)\sin(nx)\,dx. \tag{4}$$

Uma solução formal do problema é (3), com os coeficientes c_n dados por (4).