Análise Complexa e Equações Diferenciais

Exame - 28 de Janeiro de 2013

LMAC, MEBiom e MEFT

Resolução

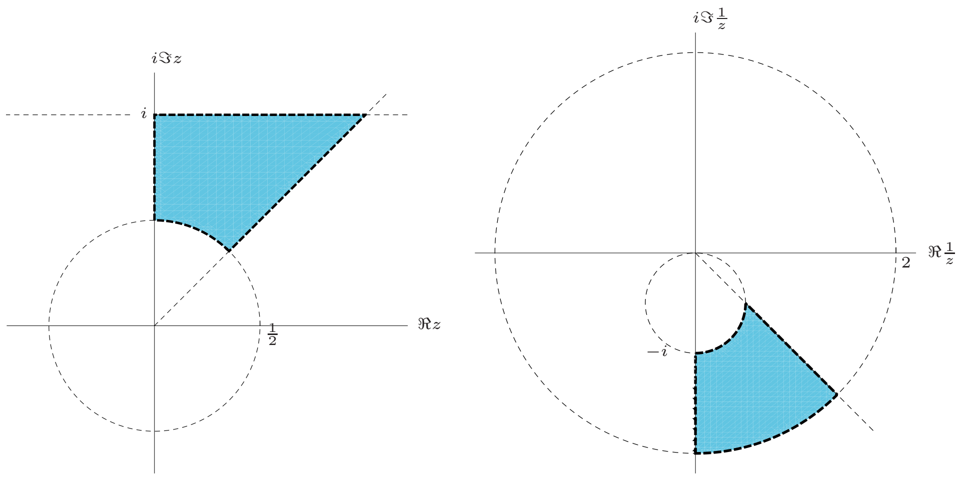
1. $z^3 = \mu^3 e^{i\frac{\pi}{2}}$. Logo,

$$z = \mu e^{i\frac{\pi}{6}} \quad \text{ou} \quad z = \mu e^{i\frac{5\pi}{6}} \quad \text{ou} \quad z = \mu e^{-i\frac{\pi}{2}},$$

ou seja,

$$z = \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{i}{2}\right)\mu \quad \text{ou} \quad z = \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{i}{2}\right)\mu \quad \text{ou} \quad z = -i\mu.$$

2.



3.

$$\begin{aligned} f_x(x+iy) &= -e^{iy} + ie^{-iy}, \\ f_y(x+iy) &= -i(x+1)e^{iy} + (x-1)e^{-iy}, \\ -if_y(x+iy) &= -(x+1)e^{iy} - i(x-1)e^{-iy}. \end{aligned}$$

A função tem derivadas parciais contínuas pelo que é $\mathbb{R}$-diferenciável. Portanto, a função é diferenciável nos pontos onde é satisfeita a equação de Cauchy-Riemann, $f_x = -if_y$. Ora,

$$\begin{aligned} f_x = -if_y \;&\Leftrightarrow\; xe^{iy} = -ixe^{-iy} \;\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ ou } e^{2iy} = -i \\ &\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ ou } y = -\tfrac{\pi}{4} + k\pi \text{ com } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

4.

a) O segmento γ é parametrizado por $z(t) = -i\pi + \pi t(1+i)$, com $t \in [0,1]$. Logo, $\overline{z(t)} = i\pi + \pi t(1-i)$ e $z'(t) = \pi(1+i)$.

$$\begin{aligned}\int_\gamma e^{\overline{z}}\,dz &= \int_0^1 e^{\overline{z(t)}} z'(t)\,dt = -\pi(1+i)\int_0^1 e^{\pi t(1-i)}\,dt \\ &= -i\, e^{\pi t(1-i)}\Big|_0^1 = -i(e^{\pi(1-i)} - 1) = i(e^\pi + 1).\end{aligned}$$

b)

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z - 1}{z^4}\,dz = \frac{2\pi i}{3!}\frac{d^3}{dz^3}(e^z - 1)\Big|_{z=0} = \frac{\pi i}{3}.$$

c) O desenvolvimento em série de Laurent em torno do ponto zero é

$$\frac{e^z - 1}{z^4} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z} + \frac{1}{4!} + \frac{z}{5!} + \frac{z^2}{6!} + \ldots,$$

válido em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. A função tem um pólo de terceira ordem na origem.

5.

a) A afirmação é falsa. A função $z \mapsto e^z = e^x e^{iy}$ é limitada em qualquer semiplano $x \leq x_0$ mas não é constante.

b) A afirmação é verdadeira. Seja f é limitada no exterior de uma bola B. A função f também é limitada em $\overline{B}$ porque é contínua, uma vez que é inteira. Portanto, f é limitada em $\mathbb{C}$. Pelo Teorema de Liouville, f é constante.

6. Obtém-se $\mu(x) = e^{2x}$. As soluções da equação diferencial satisfazem

$$e^{2x+3y} + e^{x-y} = c,$$

onde c é constante.

7.

$$y(t) = \cos(2t) + \sin(2t) - 1 + t^2.$$

8.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

9. Para que $X(t) = c(t)v + d(t)w$ seja solução de $X' = AX$, deve ter-se

$$\begin{aligned} X' = c'(t)v + d'(t)w &= A(c(t)v + d(t)w) = \lambda c(t)v + d(t)(v + \lambda w) \\ &= (\lambda c(t) + d(t))v + \lambda d(t)w. \end{aligned}$$

Como v e w são independentes, vem

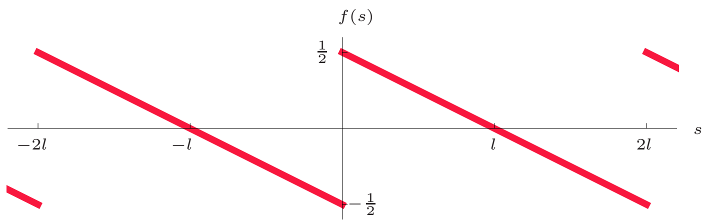
$$\begin{cases} d' = \lambda d, \\ c' - \lambda c = d. \end{cases}$$

Da primeira equação tira-se $d(t) = d_1 e^{\lambda t}$, com d_1 constante. Então, resolvendo a segunda equação, obtém-se $c(t) = c_1 e^{\lambda t} + d_1 t e^{\lambda t}$, com c_1 constante. As soluções do sistema $X' = AX$ da forma $X(t) = c(t)v + d(t)w$ são

$$X(t) = (c_1 + d_1 t)e^{\lambda t} v + d_1 e^{\lambda t} w.$$

10.

a) Esboço do gráfico da função f:



$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\tfrac{n\pi x}{l}\right)$$

com

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{x}{2l}\right)\sin\left(\tfrac{n\pi x}{l}\right) dx \\ &= -\tfrac{1}{n\pi}\left(1 - \tfrac{x}{l}\right)\cos\left(\tfrac{n\pi x}{l}\right)\Big|_0^l - \int_0^l \tfrac{1}{n\pi l}\cos\left(\tfrac{n\pi x}{l}\right) dx \\ &= \tfrac{1}{n\pi}. \end{aligned}$$

b) A solução do problema é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}t} \sin\left(\tfrac{n\pi x}{l}\right).$$

c) Sim, a série na alínea **b)** converge uniformemente em $[0,l] \times [\epsilon,+\infty[$ porque a série dos módulos é majorada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\epsilon}$$

e esta série tem soma finita.

d) A série na alínea **b)** não converge uniformemente em $[0,l]\times[0,+\infty[$. Se assim fosse, o limite seria uma função contínua porque o limite uniforme de funções contínuas é uma função contínua. Mas para $t=0$ a série coincide com a da alínea **a)**. A sucessão das somas parciais anula-se no ponto zero e o limite é a função f, uma função descontínua no ponto zero. Portanto, a convergência da série não pode ser uniforme.