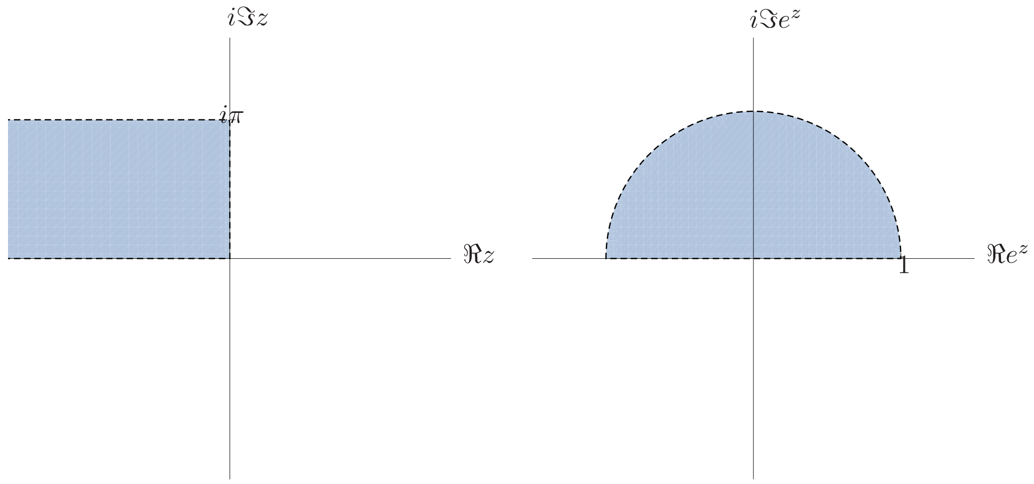
Análise Complexa e Equações Diferenciais

Exame - 14 de Janeiro de 2012

LMAC, MEBiom e MEFT

Resolução

1. Separando z na sua parte real e imaginária, $z = x + iy$, a igualdade $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ mostra que o módulo de e^z é e^x e o argumento de e^z é y. Portanto, a imagem consiste no conjunto dos complexos de módulo maior do que 0 e menor do que 1, e de argumento maior do que 0 e menor do que π.



2.

a) A curva γ pode ser parametrizada por

$$z(x) = x + ix^2, \quad \text{com } x \in [0,1].$$

Logo, pela definição de integral,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \overline{z}\, dz &= \int_0^1 \overline{z(x)} z'(x)\, dx = \int_0^1 \overline{(x+ix^2)}(1+2ix)\, dx \\
&= \int_0^1 (x - ix^2)(1+2ix)\, dx = \int_0^1 ([(x+2x^3) + ix^2]\, dx \\
&= 1 + \frac{i}{3}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_1^{ie}\left(\log z+\frac{1}{z^2}\right)dz &= \left[z(\log z-1)-\frac{1}{z}\right]\Bigg|_1^{ee^{i\frac{\pi}{2}}}\\ &= ie\times i\frac{\pi}{2}+1-\frac{1}{ie}+1 \;=\; 2-\frac{\pi e}{2}+ie^{-1}.\end{aligned}$$

c) Sejam $f(z)=\frac{1}{z(z-1)^2(z-3)^2}$, e γ_1 e γ_2 as curvas descritas por

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \partial\left\{z\in\mathbb{C}:|z|<2\ \wedge\ \Re z<\tfrac{1}{2}\right\},\\ \gamma_2 &= \partial\left\{z\in\mathbb{C}:|z|<2\ \wedge\ \Re z>\tfrac{1}{2}\right\}.\end{aligned}$$

Usando as Fórmulas Integrais de Cauchy, obtém-se

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2}f(z)\,dz &= \int_{\gamma_1}f(z)\,dz+\int_{\gamma_2}f(z)\,dz\\ &= 2\pi i\,\frac{1}{(z-1)^2(z-3)^2}\Bigg|_{z=0}+2\pi i\,\frac{d}{dz}\frac{1}{z(z-3)^2}\Bigg|_{z=1}\\ &= \frac{2\pi i}{9}+2\pi i\left(-\frac{1}{z^2(z-3)^2}-\frac{2}{z(z-3)^3}\right)\Bigg|_{z=1}\\ &= \frac{2\pi i}{9}.\end{aligned}$$

A função integranda tem um pólo simples em 0 e tem pólos duplos em 1 e 3.

d) Separando em fracções simples, vem

$$\begin{aligned}\frac{2}{(z-1)(z-3)} &= \frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-1}\\ &= -\frac{1}{3}\frac{1}{1-(z/3)}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-(1/z)}\\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}},\end{aligned}$$

válido para $1<|z|<3$.

3.

a) A função f tem derivadas parciais

$$\begin{aligned}f_x &= \frac{y}{x^2+y^2}+i\frac{x}{x^2+y^2},\\ f_y &= -\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{y}{x^2+y^2},\end{aligned}$$

e é de classe C^1, pelo que é $\mathbb{R}$-diferenciável. Além disso, satisfaz a equação de Cauchy-Riemann, $f_x = -if_y$. Portanto, a função f é diferenciável. A sua derivada é

$$f' = f_x = \frac{y}{x^2+y^2} + i\frac{x}{x^2+y^2}.$$

b) Uma vez que

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2},$$

tem-se que

$$f'(z) = \frac{i}{z}.$$

c) Seja $g : \{z \in \mathbb{C} : z \notin i\,\mathbb{R}_0^-\} \to \mathbb{C}$, definida por

$$\begin{aligned} g(z) &= \tfrac{\pi}{2} + i\log z = \tfrac{\pi}{2} + i\log(re^{i\theta}) = \tfrac{\pi}{2} + i(\ln r + i\theta) \\ &= \tfrac{\pi}{2} - \theta + i\ln r, \quad \text{para } r > 0 \text{ e } -\tfrac{\pi}{2} < \theta < \tfrac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Então, $g(i) = f(i) = 0$ e $f'(z) = g'(z) = \frac{i}{z}$. A função g é holomorfa e prolonga f.

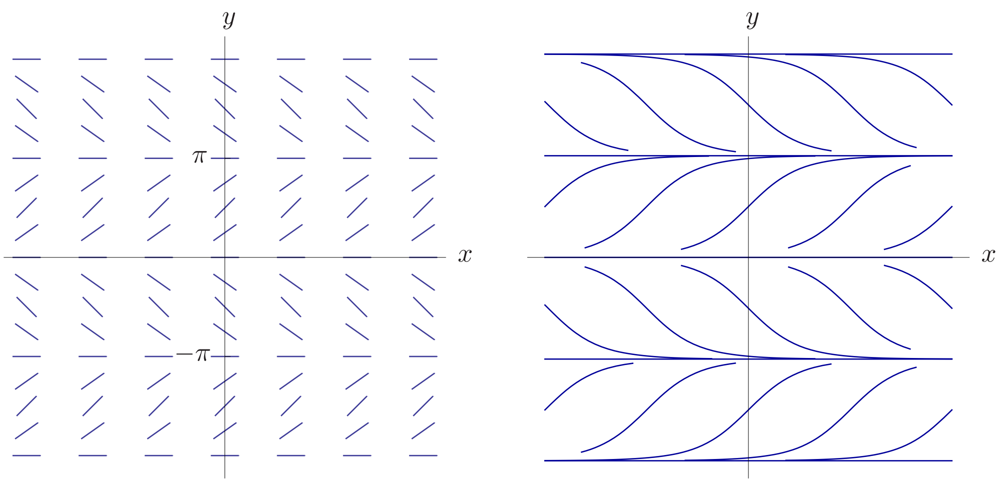
4. Se f é inteira e o seu contradomínio não intersecta $B_r(a)$, então a função g, definida por

$$g(z) = \frac{1}{f(z)-a},$$

é inteira e o seu contradomínio está contido na bola fechada $\overline{B_{\frac{1}{r}}(0)}$. Com efeito, se $|f(z)-a| \geq r$, então $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$. O Teorema de Liouville implica que g é constante. Logo, f é constante.

5. Apresenta-se o esboço do campo de direcções e dos gráficos das soluções da equação diferencial

$$y' = \sin y.$$



As curvas ortogonais aos gráficos das soluções satisfazem

$$y' = -\frac{1}{\sin y}.$$

Resolvendo, obtém-se sucessivamente

$$\begin{aligned} -\sin y\, y' = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dy}(\cos y)\frac{dy}{dx} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}[\cos(y(x))] = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \cos(y(x)) = x - c, \end{aligned}$$

onde c é constante. Portanto, as curvas ortogonais aos gráficos das soluções da equação $y' = \sin y$ são descritas por

$$x = \cos y + c.$$

6.

a) Multiplicando ambos os membros da equação diferencial por $\mu(x)$, obtém-se

$$\mu(x)(3xy^2 + 2y^3) + \mu(x)(2x^2y + 3xy^2)y' = 0.$$

Esta equação será exacta se

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x)(3xy^2 + 2y^3)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x)(2x^2y + 3xy^2)],$$

ou seja, se

$$\mu(x)(6xy + 6y^2) = \mu'(x)(2x^2y + 3xy^2) + \mu(x)(4xy + 3y^2).$$

Simplificando, obtém-se

$$x\mu'(x) = \mu(x).$$

Assim, $\mu(x) = x$ é um factor integrante.

b) Multiplicando a equação dada pelo factor integrante, vem

$$(3x^2y^2 + 2xy^3) + (2x^3y + 3x^2y^2)y' = 0.$$

O campo $(3x^2y^2 + 2xy^3, 2x^3y + 3x^2y^2)$ admite o potencial

$$\phi(x, y) = x^3y^2 + x^2y^3$$

e a equação diferencial pode escrever-se na forma

$$\phi_x + \phi_y y' = 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{d}{dx}[\phi(x, y(x))] = 0.$$

Portanto, a solução geral da equação diferencial é

$$x^3y^2 + x^2y^3 = c,$$

onde c é constante.

c) O conjunto de pontos do plano (x, y) no qual o Teorema da Função Implícita não garante que a equação $x^3y^2 + x^2y^3 = c$ define localmente y como função de x é o conjunto de pontos em que

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^3y^2 + x^2y^3)$$

se anula. Ou seja, é o conjunto de pontos que satisfaz

$$2x^3y + 3x^2y^2 = 0.$$

Trata-se, portanto, dos pontos tais que

$$x = 0 \ \vee \ y = 0 \ \vee \ 2x + 3y = 0.$$

7. Designando por D o operador de derivação, a equação pode ser escrita na forma

$$(D^2 + 1)b(t) = 2\sin t.$$

Aplicando o operador (D^2+1) a ambos os membros, as soluções desta equação satisfazem

$$(D^2 + 1)^2 b(t) = 0.$$

A solução geral desta segunda equação diferencial é

$$b(t) = c_1 \cos t + d_1 \sin t + \tilde{c}_1 t \cos t + \tilde{d}_1 t \sin t,$$

onde c_1, d_1, $\tilde{c}_1$ e $\tilde{d}_1$ são constantes. Determinemos quais destas funções são soluções da equação original. Substituindo na equação dada, vem

$$(D^2 + 1)(c_1 \cos t + d_1 \sin t + \tilde{c}_1 t \cos t + \tilde{d}_1 t \sin t) = 2\sin t,$$

ou

$$(D^2 + 1)(\tilde{c}_1 t \cos t + \tilde{d}_1 t \sin t) = 2\sin t.$$

Calculando o primeiro membro, chega-se a

$$-2\tilde{c}_1 \sin t + 2\tilde{d}_1 \cos t = 2\sin t,$$

o que implica $\tilde{c}_1 = -1$ e $\tilde{d}_1 = 0$. Conclui-se que a solução geral da equação dada é

$$b(t) = c_1 \cos t + d_1 \sin t - t\cos t,$$

onde c_1 e d_1 são constantes. Uma vez que

$$b''(t) = -c_1 \cos t - d_1 \sin t + t\cos t + 2\sin t,$$

confirma-se que

$$b''(t) = -b(t) + 2\sin t.$$

8.

a) Prolongando a solução como função ímpar em x e periódica em x, de período 2π, obtém-se uma função de classe C^2 no semiplano $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t \geq 0\}$ que satisfaz a equação diferencial neste semiplano. Para cada t não negativo, tem-se

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(nx).$$

Substituindo na equação diferencial, obtém-se

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} b_n''(t) \sin(nx) &= -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n(t) \sin(nx) + 2 \sin x \sin t \\ &= (-b_1(t) + 2\sin t) \sin x - \sum_{n=2}^{\infty} n^2 b_n(t) \sin(nx).\end{aligned}$$

Logo, a unicidade dos coeficientes de Fourier implica

$$b_1''(t) = -b_1(t) + 2 \sin t$$

e

$$b_n''(t) = -n^2 b_n(t) \quad \text{para } n \geq 2.$$

Portanto, usando o resultado da pergunta anterior,

$$b_1(t) = c_1 \cos t + d_1 \sin t - t \cos t$$

e

$$b_n(t) = c_n \cos(nt) + d_n \sin(nt) \quad \text{para } n \geq 2.$$

Isto conduz a

$$\begin{aligned}u(x,t) &= (c_1 \cos t + d_1 \sin t - t \cos t) \sin x \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} (c_n \cos(nt) + d_n \sin(nt)) \sin(nx).\end{aligned}$$

b) Uma vez que, de acordo com a alínea anterior,

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx)$$

e que se pretende que esta função se anule, todos os coeficientes c_n devem ser nulos. Por outro lado,

$$u_t(x,0) = (d_1 - 1) \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} n d_n \sin(nx).$$

Escolhe-se $d_1 = 2$ e $d_n = 0$ para $n \geq 2$ de modo a que $u_t(x, 0)$ seja igual a $\sin x$. Assim, a solução do problema posto é

$$u(x,t) = (2\sin t - t\cos t)\sin x.$$

9. O gradiente de u é perpendicular ao vector $(1, -1)$ em todos os pontos. Como o gradiente de u também é perpendicular às curvas de nível de u, as curvas de nível de u têm a direcção do vector $(1, -1)$ em todos os pontos. Logo, as curvas de nível de u são rectas com a direcção do vector $(1, -1)$, isto é, são as rectas $x + t =$ constante. Por isto, o valor de $u(x, t)$ só depende de $x + t$ e coincide com o valor de $u(x + t, 0) = u_0(x + t)$. Portanto, a solução do problema é

$$u(x,t) = u_0(x+t).$$