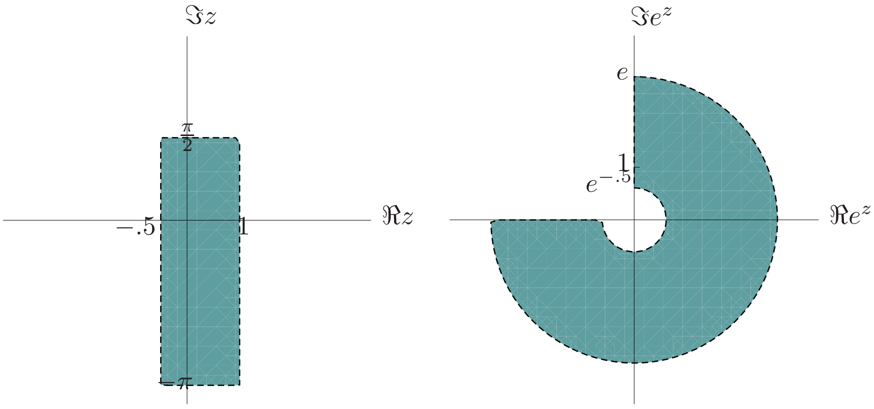
Análise Complexa e Equações Diferenciais

Exame - 15 de Janeiro de 2011

LMAC, MEBiom e MEFT

Resolução

1. Separando z na sua parte real e imaginária $z = x + iy$, a igualdade $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ mostra que o módulo de e^z é e^x e o argumento de e^z é y. Portanto, a imagem consiste no conjunto dos complexos de módulo entre $e^{-1/2}$ e e, e argumento entre $-\pi$ e $\frac{\pi}{2}$.



2. Como f tem derivadas parciais contínuas é $\mathbb{R}$-diferenciável. Será diferenciável sse satisfizer a equação de Cauchy-Riemann, $f_x = -if_y$. Derivando f em ordem a x e a y,

$$\begin{aligned} f_x &= 2x + 2iy \\ f_y &= -2y + i(2x - \sin y) \\ -if_y &= (2x - \sin y) + 2iy. \end{aligned}$$

Logo, a equação de Cauchy-Riemann é satisfeita sse $\sin y = 0 \Leftrightarrow y = k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. Conclui-se que f é diferenciável em $\{z \in \mathbb{C} : z = x + ik\pi \text{ com } x \in \mathbb{R} \text{ e } k \in \mathbb{Z}\}$. Nos pontos deste conjunto $f'(z) = f_x(z) = 2z$.

3. A maior região anular aberta centrada em zero contendo o ponto -2 e contida na região de holomorfia da função ($\mathbb{C} \setminus \{-1, 3\}$) é $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| <$

$3\}$. Separando em fracções simples e usando a série geométrica, nesta região anular tem-se

$$\begin{aligned}\frac{4}{(z+1)(z-3)} &= -\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-3}\\ &= -\frac{1}{z}\frac{1}{1+(1/z)}-\frac{1}{3}\frac{1}{1-(z/3)}\\ &= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}.\end{aligned}$$

A função tem pólos de primeira ordem em -1 e 3.

4. Seja $R>2$ e $D_R=\{z\in\mathbb{C}:|z|<R,\ \Im z>0\}$. Pela Fórmula Integral de Cauchy,

$$\begin{aligned}\int_{\partial D_R}\frac{1}{(z^2+4)^2}\,dz &= \int_{\partial D_R}\frac{1/(z+2i)^2}{(z-2i)^2}\,dz\\ &= 2\pi i\left.\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+2i)^2}\right|_{z=2i} = -2\pi i\left.\frac{2}{(z+2i)^3}\right|_{z=2i} = \frac{\pi}{16}.\end{aligned}$$

Assim, designando por $f(z)=\frac{1}{(z^2+4)^2}$,

$$\int_{\{z\in\mathbb{C}:|z|<R,\ \Im z=0\}}f(z)\,dz+\int_{\{z\in\mathbb{C}:|z|=R,\ \Im z>0\}}f(z)\,dz=\frac{\pi}{16}. \tag{1}$$

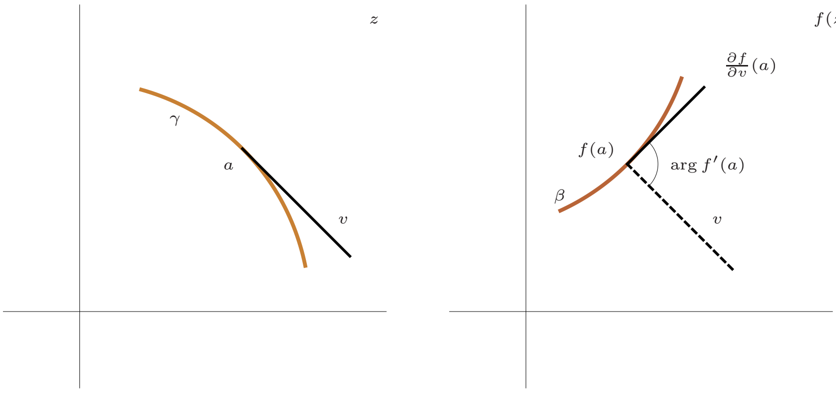
Usando $|z-w|\geq||z|-|w||$,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\{z\in\mathbb{C}:|z|=R,\ \Im z>0\}}\frac{1}{(z^2+4)^2}\,dz\right| &\leq \int_{\{z\in\mathbb{C}:|z|=R,\ \Im z>0\}}\frac{1}{|z^2+4|^2}\,|dz|\\ &\leq \int_{\{z\in\mathbb{C}:|z|=R,\ \Im z>0\}}\frac{1}{||z^2|-4|^2}\,|dz|\\ &= \int_{\{z\in\mathbb{C}:|z|=R,\ \Im z>0\}}\frac{1}{(R^2-4)^2}\,|dz|\\ &= \frac{\pi R}{(R^2-4)^2}\longrightarrow 0 \quad \text{quando } R\to+\infty.\end{aligned}$$

Logo, tomando o limite de ambos os membros de (1) quando $R\to+\infty$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx=\lim_{R\to\infty}\int_{\{z\in\mathbb{C}:|z|<R,\ \Im z=0\}}f(z)\,dz=\frac{\pi}{16}.$$

5. Suponhamos que f é diferenciável em a e $f'(a) \neq 0$. Seja γ uma curva com $\gamma(0) = a$ e $\gamma'(0) = v = |v|E(i\theta)$. A imagem de γ por f é $\beta = f(\gamma)$, cuja direcção no ponto $f(a)$ é a de $\beta'(0) = f'(a)\gamma'(0) = f'(a)v = \frac{\partial f}{\partial v}(a)$. Portanto, $\arg \beta'(0) = \arg f'(a) + \arg v$. Assim, a direcção de $\beta'(0)$ é a direcção original (ângulo θ com o eixo real) rodada do argumento de $f'(a)$ no sentido directo.



Como a função f roda todas as direcções por um ângulo igual ao argumento de $f'(a)$, os ângulos com vértice em a são preservados.

6. Facilmente se verifica que a equação diferencial não é exacta. Tentemos determinar um factor integrante da forma $\mu(x)$. A nova equação é

$$\mu(x)(2y^2 + 3ye^x) + \mu(x)(2y + e^x)y' = 0. \tag{2}$$

Para que esta equação seja exacta deverá ter-se

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x)(2y^2 + 3ye^x)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x)(2y + e^x)],$$

ou seja,

$$\mu(x)(4y + 3e^x) = \mu'(x)(2y + e^x) + \mu(x)e^x.$$

Esta equação é equivalente a

$$\mu(x)(4y + 2e^x) = \mu'(x)(2y + e^x) \iff 2\mu(x) = \mu'(x).$$

Portanto, e^{2x} é factor integrante. Substituindo em (2),

$$(2y^2e^{2x} + 3ye^{3x}) + (2ye^{2x} + e^{3x})y' = 0.$$

O campo $(2y^2e^{2x} + 3ye^{3x}, 2ye^{2x} + e^{3x})$ é um gradiente. Designando por ϕ um potencial, tem-se

$$\begin{cases} \phi_x = 2y^2e^{2x} + 3ye^{3x}, \\ \phi_y = 2ye^{2x} + e^{3x}. \end{cases}$$

Deste sistema tira-se

$$\begin{cases} \phi = y^2e^{2x} + ye^{3x} + c_1(y), \\ \phi = y^2e^{2x} + ye^{3x} + c_2(x), \end{cases}$$

de onde $\phi = y^2e^{2x} + ye^{3x} + c$. Podemos tomar $\phi = y^2e^{2x} + ye^{3x}$. Com esta escolha de ϕ a equação diferencial escreve-se

$$\phi_x + \phi_y y' = 0 \text{ ou } \frac{d}{dx}[\phi(x, y(x))] = 0.$$

A solução é $\phi(x, y(x)) = \phi(x_0, y(x_0)) = \phi(x_0, y_0)$. Conclui-se

$$y^2e^{2x} + ye^{3x} = y_0^2e^{2x_0} + y_0e^{3x_0}.$$

Usando a fórmula resolvente,

$$\begin{aligned} y &= = \frac{-e^{3x} + \sqrt{e^{6x} + 4y_0^2e^{2(x+x_0)} + 4y_0e^{2x+3x_0}}}{2e^{2x}} \\ &= -\frac{e^x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{e^{2x} + 4y_0^2e^{2(-x+x_0)} + 4y_0e^{-2x+3x_0}} \end{aligned}$$

Escolhemos o sinal mais antes da raiz porque quando $x = x_0$ deve vir $y = y_0$, sendo que por hipótese $2y_0 + e^{x_0} > 0$, o que equivale a $y_0 > -\frac{e^{x_0}}{2}$.

7. Procuramos soluções da forma $y(t) = t^\lambda$. Substituindo na equação diferencial,

$$t^2\lambda(\lambda-1)t^{\lambda-2} + 2t\lambda t^{\lambda-1} - 6t^\lambda = 0.$$

Dividindo ambos os membros por t^λ,

$$\lambda(\lambda-1) + 2\lambda - 6 = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \ \Leftrightarrow \ (\lambda+3)(\lambda-2) = 0.$$

Logo, $\lambda = -3$ ou $\lambda = 2$. A solução geral da equação diferencial é

$$y(t) = \frac{c_1}{t^3} + c_2t^2.$$

8. As iteradas de Picard são

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{\pi}{4} + \int_0^t \tan y_0(s)\, ds \\ &= \frac{\pi}{4} + \int_0^t 1\, ds = \frac{\pi}{4} + t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \frac{\pi}{4} + \int_0^t \tan y_1(s)\, ds \\ &= \frac{\pi}{4} + \int_0^t \frac{\sin(\frac{\pi}{4}+s)}{\cos(\frac{\pi}{4}+s)}\, ds \\ &= \frac{\pi}{4} - \ln\bigl[\cos(\tfrac{\pi}{4}+t)\bigr] + \ln\bigl[\cos\tfrac{\pi}{4}\bigr] \\ &= \frac{\pi}{4} - \ln\bigl[\cos(\tfrac{\pi}{4}+t)\bigr] + \ln\bigl[\tfrac{\sqrt{2}}{2}\bigr], \end{aligned}$$

sendo que o domínio de y_2 é $\left]-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, porque nos extremos deste intervalo o argumento do coseno se anula e o logaritmo não está definido.

9.

a) Para cada y fixo,

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(y)\cos(nx) + b_n(y)\sin(nx)].$$

Assim, as condições fronteira $u(-\pi,y) = u(\pi,y)$ e $u_x(-\pi,y) = u_x(\pi,y)$ para $y \in [0,\pi]$ estão formalmente satisfeitas. O laplaciano de u é

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= \sum_{n=0}^{\infty} [-n^2 a_n(y)\cos(nx) - n^2 b_n(y)\sin(nx)] \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} [a_n''(y)\cos(nx) + b_n''(y)\sin(nx)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(a_n''(y) - n^2 a_n(y))\cos(nx) + (b_n''(y) - n^2 b_n(y))\sin(nx)]. \end{aligned}$$

Para que u seja harmónica,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_n''(y) &=& n^2 a_n(y) \\ b_n''(y) &=& n^2 b_n(y) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a_n(y) &=& c_n\cosh(ny) + d_n\sinh(ny) \\ b_n(y) &=& e_n\cosh(ny) + f_n\sinh(ny) \end{array} \right.$$

para $n \neq 0$. Por outro lado, $a_0(y) = c_0 + d_0 y$. Em particular, como $a_n(0) = c_n$ e $b_n(0) = e_n$,

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} [c_n\cos(nx) + e_n\sin(nx)].$$

Para que esta função se anule, por unicidade dos coeficientes de Fourier, deve ter-se $c_n = e_n = 0$ para todo o n. Logo,

$$u(x,y) = d_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} [d_n\sinh(ny)\cos(nx) + f_n\sinh(ny)\sin(nx)]. \tag{3}$$

Resta garantir a condição fronteira $u(x,\pi) = f(x)$. Uma vez que

$$u(x,\pi) = d_0\pi + \sum_{n=1}^{\infty}[d_n \sinh(n\pi)\cos(nx) + f_n \sinh(n\pi)\sin(nx)],$$

esta condição fronteira será satisfeita se $d_0\pi$, $d_n \sinh(n\pi)$ e $f_n \sinh(n\pi)$ forem os coeficientes de Fourier de f, isto é,

$$\begin{aligned}
d_0\pi &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,\\
d_n \sinh(n\pi) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx,\\
f_n \sinh(n\pi) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx,
\end{aligned}$$

para $n \geq 1$. A solução do problema do enunciado é dada por (3) com estes coeficientes d_n e f_n.

b) A solução para $f(x) = 1 + \cos x + \sin(2x)$ é

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}y + \frac{1}{\sinh(\pi)}\sinh y \cos x + \frac{1}{\sinh(2\pi)}\sinh(2y)\sin(2x).$$

10. Sim, pode garantir-se que os coeficientes de Fourier convergem para zero. Com efeito, os coeficientes a_n, para $n \geq 1$, são dados por

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\tfrac{n\pi x}{l}\right)dx\\
&= \tfrac{1}{n\pi}\sin\left(\tfrac{n\pi x}{l}\right)f(x)\Big|_{-l}^{l} - \tfrac{1}{n\pi}\int_{-l}^{l} f'(x)\sin\left(\tfrac{n\pi x}{l}\right)dx\\
&= -\tfrac{1}{n\pi}\int_{-l}^{l} f'(x)\sin\left(\tfrac{n\pi x}{l}\right)dx
\end{aligned}$$

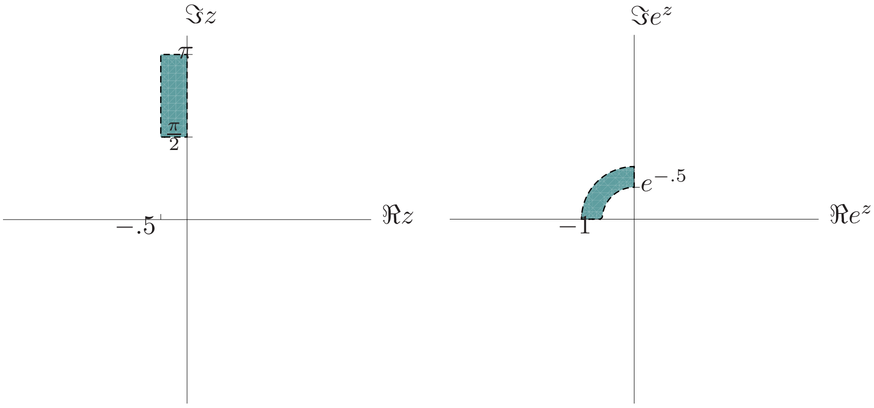
Sendo f periódica, f' também é periódica. Como além disso, por hipótese, f' é contínua, f' é limitada. Designemos por M um majorante do módulo de f'. Tem-se que

$$|a_n| \leq \frac{2Ml}{n\pi}.$$

Esta desigualdade prova que (a_n) tende para zero quando n converge para infinito. Semelhantemente para a sucessão de coeficientes (b_n).

Versão 2

1. Separando z na sua parte real e imaginária $z = x + iy$, a igualdade $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ mostra que o módulo de e^z é e^x e o argumento de e^z é y. Portanto, a imagem consiste no conjunto dos complexos de módulo entre $e^{-1/2}$ e 1, e argumento entre $\frac{\pi}{2}$ e π.



2. Como f tem derivadas parciais contínuas é $\mathbb{R}$-diferenciável. Será diferenciável sse satisfizer a equação de Cauchy-Riemann, $f_x = -if_y$. Derivando f em ordem a x e a y,

$$\begin{aligned} f_x &= (2x - \sin x) + 2iy \\ f_y &= -2y + 2ix \\ -if_y &= 2x + 2iy. \end{aligned}$$

Logo, a equação de Cauchy-Riemann é satisfeita sse $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. Conclui-se que f é diferenciável em $\{z \in \mathbb{C} : z = k\pi + iy \text{ com } k \in \mathbb{Z} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$. Nos pontos deste conjunto $f'(z) = f_x(z) = 2z$.

3. A maior região anular aberta centrada em zero contendo o ponto 2 e contida na região de holomorfia da função ($\mathbb{C} \setminus \{-3, 1\}$) é $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$. Separando em fracções simples e usando a série geométrica, nesta região anular tem-se

$$\begin{aligned} \frac{4}{(z-1)(z+3)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+3} \\ &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-(1/z)} - \frac{1}{3}\frac{1}{1+(z/3)} \\ &= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} z^n}{3^{n+1}}. \end{aligned}$$

A função tem pólos de primeira ordem em -3 e 1.

4. Seja $R > 3$ e $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R,\ \Im z > 0\}$. Pela Fórmula Integral de Cauchy,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D_R} \frac{1}{(z^2+9)^2}\, dz &= \int_{\partial D_R} \frac{1/(z+3i)^2}{(z-3i)^2}\, dz \\
&= 2\pi i \left.\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+3i)^2}\right|_{z=3i} = -2\pi i \left.\frac{2}{(z+3i)^3}\right|_{z=3i} = \frac{\pi}{54}.
\end{aligned}$$

Assim, designando por $f(z) = \frac{1}{(z^2+9)^2}$,

$$\int_{\{z\in\mathbb{C}:|z|<R,\ \Im z=0\}} f(z)\, dz + \int_{\{z\in\mathbb{C}:|z|=R,\ \Im z>0\}} f(z)\, dz = \frac{\pi}{54}. \qquad (4)$$

Usando $|z-w| \geq ||z|-|w||$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\{z\in\mathbb{C}:|z|=R,\ \Im z>0\}} \frac{1}{(z^2+9)^2}\, dz\right| &\leq \int_{\{z\in\mathbb{C}:|z|=R,\ \Im z>0\}} \frac{1}{|z^2+9|^2}\, |dz| \\
&\leq \int_{\{z\in\mathbb{C}:|z|=R,\ \Im z>0\}} \frac{1}{||z^2|-9|^2}\, |dz| \\
&= \int_{\{z\in\mathbb{C}:|z|=R,\ \Im z>0\}} \frac{1}{(R^2-9)^2}\, |dz| \\
&= \frac{\pi R}{(R^2-9)^2} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } R \to +\infty.
\end{aligned}$$

Logo, tomando o limite de ambos os membros de (4) quando $R \to +\infty$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+9)^2}\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\{z\in\mathbb{C}:|z|<R,\ \Im z=0\}} f(z)\, dz = \frac{\pi}{54}.$$

5.

6. Facilmente se verifica que a equação diferencial não é exacta. Tentemos determinar um factor integrante da forma $\mu(x)$. A nova equação é

$$\mu(x)(3y^2 + 5ye^{2x}) + \mu(x)(2y + e^{2x})y' = 0. \qquad (5)$$

Para que esta equação seja exacta deverá ter-se

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x)(3y^2 + 5ye^{2x})] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x)(2y + e^{2x})],$$

ou seja,

$$\mu(x)(6y + 5e^{2x}) = \mu'(x)(2y + e^{2x}) + \mu(x)2e^{2x}.$$

Esta equação é equivalente a

$$\mu(x)(6y + 3e^{2x}) = \mu'(x)(2y + e^{2x}) \;\Leftrightarrow\; 3\mu(x) = \mu'(x).$$

Portanto, e^{3x} é factor integrante. Substituindo em (5),

$$(3y^2e^{3x} + 5ye^{5x}) + (2ye^{3x} + e^{5x})y' = 0.$$

O campo $(3y^2e^{3x} + 5ye^{5x}, 2ye^{3x} + e^{5x})$ é um gradiente. Designando por ϕ um potencial, tem-se

$$\begin{cases} \phi_x &= 3y^2e^{3x} + 5ye^{5x}, \\ \phi_y &= 2ye^{3x} + e^{5x}. \end{cases}$$

Deste sistema tira-se

$$\begin{cases} \phi &= y^2e^{3x} + ye^{5x} + c_1(y), \\ \phi &= y^2e^{3x} + ye^{5x} + c_2(x), \end{cases}$$

de onde $\phi = y^2e^{3x} + ye^{5x} + c$. Podemos tomar $\phi = y^2e^{3x} + ye^{5x}$. Com esta escolha de ϕ a equação diferencial escreve-se

$$\phi_x + \phi_y y' = 0 \text{ ou } \frac{d}{dx}[\phi(x, y(x))] = 0.$$

A solução é $\phi(x, y(x)) = \phi(x_0, y(x_0)) = \phi(x_0, y_0)$. Portanto,

$$y^2e^{3x} + ye^{5x} = y_0^2e^{3x_0} + y_0e^{5x_0}.$$

Usando a fórmula resolvente,

$$\begin{aligned} y &= \frac{-e^{5x} + \sqrt{e^{10x} + 4y_0^2e^{3(x+x_0)} + 4y_0e^{3x+5x_0}}}{2e^{3x}} \\ &= -\frac{e^{2x}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{e^{4x} + 4y_0^2e^{3(-x+x_0)} + 4y_0e^{-3x+5x_0}}. \end{aligned}$$

Escolhemos o sinal mais antes da raiz porque quando $x = x_0$ deve vir $y = y_0$, sendo que por hipótese $2y_0 + e^{2x_0} > 0$, o que equivale a $y_0 > -\frac{e^{2x_0}}{2}$.

7. Procuramos soluções da forma $y(t) = t^\lambda$. Substituindo na equação diferencial,

$$t^2\lambda(\lambda - 1)t^{\lambda-2} + 2t\lambda t^{\lambda-1} - 12t^\lambda = 0.$$

Dividindo ambos os membros por t^λ,

$$\lambda(\lambda - 1) + 2\lambda - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda^2 + \lambda - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; (\lambda + 4)(\lambda - 3) = 0.$$

Logo, $\lambda = -4$ ou $\lambda = 3$. A solução geral da equação diferencial é

$$y(t) = \frac{c_1}{t^4} + c_2 t^3.$$

8. As iteradas de Picard são

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{\pi}{4} + \int_0^t \cot y_0(s)\, ds \\ &= \frac{\pi}{4} + \int_0^t 1\, ds = \frac{\pi}{4} + t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \frac{\pi}{4} + \int_0^t \cot y_1(s)\, ds \\ &= \frac{\pi}{4} + \int_0^t \frac{\cos(\frac{\pi}{4}+s)}{\sin(\frac{\pi}{4}+s)}\, ds \\ &= \frac{\pi}{4} + \ln\big[\sin(\tfrac{\pi}{4}+t)\big] - \ln\big[\sin\tfrac{\pi}{4}\big] \\ &= \frac{\pi}{4} + \ln\big[\sin(\tfrac{\pi}{4}+t)\big] - \ln\big[\tfrac{\sqrt{2}}{2}\big], \end{aligned}$$

sendo que o domínio de y_2 é $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$, porque nos extremos deste intervalo o argumento do seno se anula e o logaritmo não está definido.

9.

a)
b) A solução para $f(x) = 1 + \sin x + \cos(2x)$ é

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} y + \frac{1}{\sinh(\pi)} \sinh y \sin x + \frac{1}{\sinh(2\pi)} \sinh(2y)\cos(2x).$$

10.