Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Exame - 11 de Janeiro de 2010

LMAC, MEBiom e MEFT

Resolução

1.

a) $\log\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \log e^{i\frac{\pi}{3}} = i\frac{\pi}{3}$.

b) $\int_0^{i\pi} ze^z\, dz = ze^z\big|_0^{i\pi} - \int_0^{i\pi} e^z\, dz = -i\pi - e^z\big|_0^{i\pi} = 2 - i\pi$.

c) Usando o Teorema dos Resíduos,

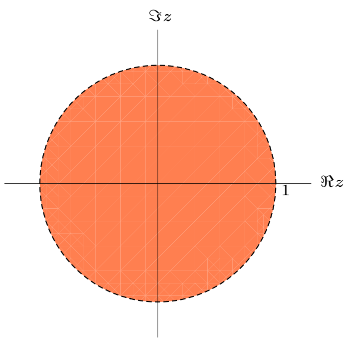
$$\int_{|z|=2\pi} \frac{e^z}{z^2+\pi^2}\, dz = \int_{|z|=2\pi} \frac{e^z}{(z+i\pi)(z-i\pi)}\, dz = 2\pi i \left.\frac{e^z}{z+i\pi}\right|_{z=i\pi} + 2\pi i \left.\frac{e^z}{z-i\pi}\right|_{z=-i\pi} = 0.$$

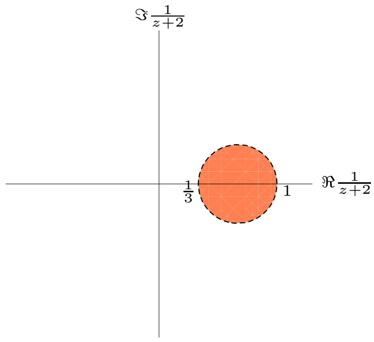
A função integranda tem pólos simples em $-i\pi$ e $i\pi$.

d) O desenvolvimento em série de Laurent válido para $|z| > 2$ é

$$\frac{1}{z-2} + e^{z+2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} + e^2 e^z = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n + e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} + e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

2. As imagens de -1, 0 e 1 por $z \mapsto \frac{1}{z+2}$ são 1, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$, respectivamente. Como se trata de uma transformação de Möbius e a circunferência $|z| = 1$ não passa em -2, a sua imagem é uma circunferência, porque não passa em infinito. A recta real é transformada nela própria. Uma vez que a circunferência $|z| = 1$ é simétrica em relação ao eixo real, a sua imagem é também simétrica em relação ao eixo real. Combinando estas informações, podemos fazer o esboço seguinte.



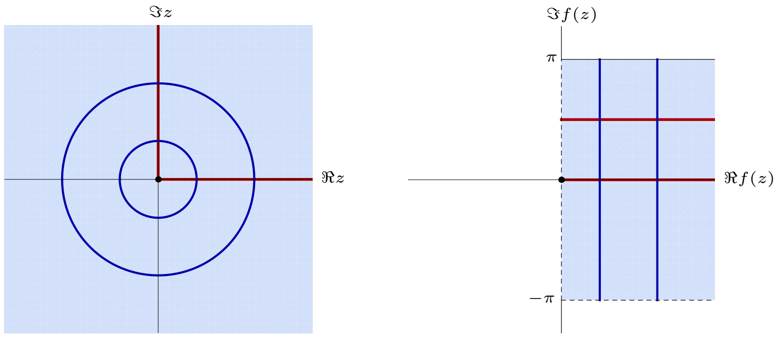


3.

a) O contradomínio de f é $\{0\} \cup \{w \in \mathbb{C} : \Re w > 0 \text{ e } -\pi < \Im w \leq \pi\}$. Seja $-\pi < \theta_0 \leq \pi$. A função não é contínua na origem porque o limite

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ \theta=\theta_0}} f(re^{i\theta}) = i\theta_0$$

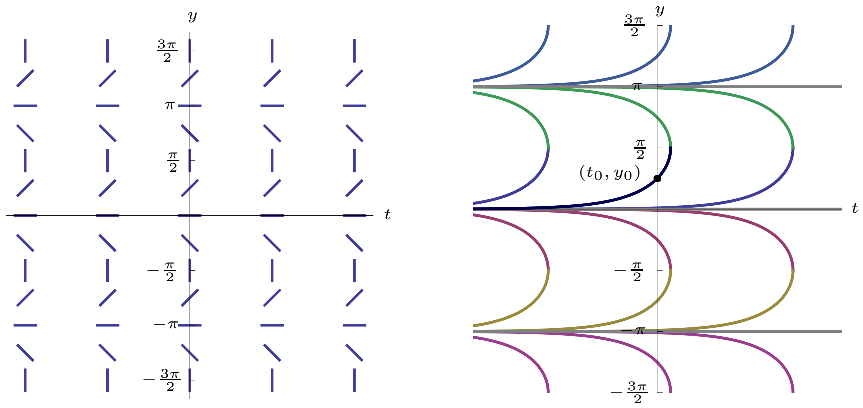
depende de θ_0.



b) A função f não é diferenciável na origem porque não é contínua na origem. A função f é descontínua no eixo real negativo, pelo que não é diferenciável no eixo real negativo. Assim, designando por $\mathcal{S} := \{z \in \mathbb{C} : \Im z = 0 \text{ e } \Re z \leq 0\}$, a função f não é $\mathbb{R}$-diferenciável em $\mathcal{S}$. Em qualquer ponto $re^{i\theta} \notin \mathcal{S}$, $\frac{\partial f}{\partial r}(re^{i\theta}) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial \theta}(re^{i\theta}) = i$. Logo, as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial r}$ e $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ são contínuas em $\mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$, pelo que f é $\mathbb{R}$-diferenciável em $\mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$. A forma polar da equação de Cauchy-Riemann, $\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{i}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}$, é $1 = \frac{1}{r}$, ou $r = 1$. Como f é diferenciável nos pontos onde for $\mathbb{R}$-diferenciável e satisfizer a equação de Cauchy-Riemann, f é diferenciável na circunferência de raio um centrada na origem com o ponto -1 excluído. Para $-\pi < \theta < \pi$, tem-se $f'(e^{i\theta}) = e^{-i\theta}\frac{\partial f}{\partial r}(e^{i\theta}) = e^{-i\theta}$.

4.

a) O esboço do campo de direcções e dos gráficos das soluções de $y' = \tan y$ é feito na figura seguinte.



Escolhemos o ponto $(t_0, y_0) = \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ e marcámos a azul escuro o gráfico da solução com condição inicial $y(t_0) = y_0$. Essa curva não contém nenhum ponto sobre a recta $y = \frac{\pi}{2}$ porque, se contivesse, sobre essa recta o declive do gráfico das do soluções seria infinito. Aliás, as rectas $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, não pertencem ao domínio de $(t, y) \mapsto \tan y$.

b) A equação é separável, sendo a sua forma canónica $\cot y y' = 1$, ou

$$\frac{\cos y}{\sin y} y' = 1.$$

Tem-se

$$\frac{d}{dy} \log|\sin y| y' = 1.$$

Pela derivada da função composta

$$\frac{d}{dt} \log|\sin y| = 1.$$

Integrando ambos os membros de t_0 a t,

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds} \log|\sin y(s)|\, ds = \int_{t_0}^{t} 1\, ds,$$

de onde

$$\log\left|\frac{\sin y(t)}{\sin y_0}\right| = t - t_0 \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{\sin y(t)}{\sin y_0}\right| = e^{t-t_0}.$$

Podemos tirar o módulo porque em $t = t_0$ a fracção é positiva, a fracção é contínua, e nunca se anula, já que o segundo membro é positivo. Assim,

$$\sin y(t) = e^{t-t_0} \sin y_0.$$

Como $0 < y_0 < \frac{\pi}{2}$ e $0 < \sin y_0 < 1$, esta igualdade é válida para $e^{t-t_0}\sin y_0 < 1$, ou seja, $t < t_0 + \log\frac{1}{\sin y_0}$. Atendendo novamente à desigualdade $0 < y_0 < \frac{\pi}{2}$, explicitamente, a solução da equação diferencial é

$$y(t) = \arcsin\left(e^{t-t_0}\sin y_0\right),$$

e o seu domínio $]-\infty, t_0 - \log(\sin y_0)[$. Este intervalo não é fechado à direita porque quando $t \nearrow t_0 - \log(\sin y_0)$, tem-se $\sin y(t) \nearrow 1$, o que implica $\cos y(t) \searrow 0$ e $y'(t) \nearrow +\infty$.

5.

a) O número de coelhos é modelado pelo sistema

$$\begin{cases} x' &= 0.1x + 0.1(y-x) \\ y' &= 0.25y + 0.1(x-y) \end{cases}.$$

Simplificando e escrevendo na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

b) O polinómio característico da matriz A do sistema é

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr} A\lambda + \det A = \lambda^2 - 0.15\lambda - 0.01.$$

Os valores próprios satisfazem $p(\lambda) = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{0.15 \pm \sqrt{0.0225 + 0.04}}{2} = \frac{0.15 \pm \sqrt{0.0625}}{2} = \frac{0.15 \pm 0.25}{2} \\ &= -0.05 \text{ ou } 0.2. \end{aligned}$$

Logo, A é semelhante à matriz diagonal

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -0.05 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

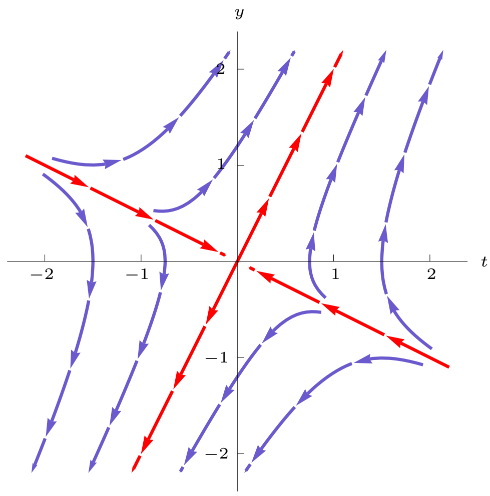
O espaço nulo de $A + 0.05I$ é gerado por $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Como A é simétrica, o espaço nulo de $A - 0.2I$ é gerado pelo vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, ortogonal ao anterior. Podemos tomar para S a matriz ortogonal

$$S = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A solução do sistema com condição inicial $X(0) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ é

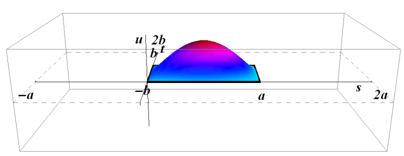
$$\begin{aligned} X(t) &= e^{At}X_0 = Se^{\Lambda t}S^{-1}X_0 = Se^{\Lambda t}S^TX_0 = Se^{\Lambda t}SX_0 \\ &= \tfrac{-2x_0+y_0}{5}\, e^{-0.05t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \tfrac{x_0+2y_0}{5}\, e^{0.2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

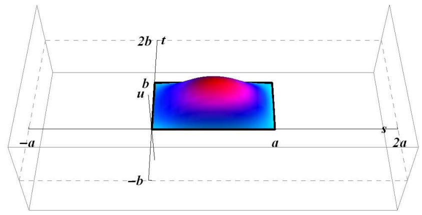
c) Na figura seguinte fazemos o esboço do retrato de fase do sistema.



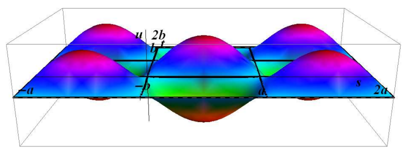
6.

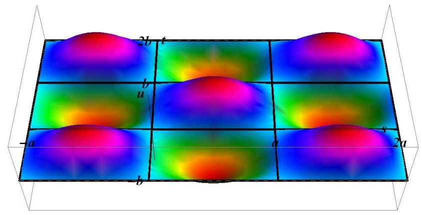
a) Seja u uma solução.





Em primeiro lugar, estendemos u como função ímpar em s. Em seguida, estendemos u como função periódica em s, de período $2a$. Depois, estendemos u como função ímpar em t. Finalmente, estendemos u como função periódica em t, de período $2b$.





Nota. A condição $u(0,t)=0$ implica $u_{tt}(0,t)=0$. Da equação de Helmholtz, $u_{ss}(0,t)=-u_{tt}(0,t)-\lambda u(0,t)=0$. As condições $u(0,t)=0$ e $u_{ss}(0,t)=0$ garantem que não há descontinuidade de u e das suas duas primeiras derivadas no eixo dos t's.
A extensão de u satisfaz a equação de Helmholtz em todo o espaço. Com efeito, designando por v a reflexão ímpar de u em relação ao eixo dos t's,

$$-(v_{ss}(s,t)+v_{tt}(s,t))=-(u_{ss}(-s,t)+u_{tt}(-s,t))=\lambda u(-s,t)=\lambda v(s,t),$$

e semelhantemente para a reflexão ímpar de u em relação ao eixo dos s's.

b) Para cada t fixo, a extensão de u pode ser expandida em série de Fourier. Como u é ímpar em s, tem período $2a$ e os coeficientes da expansão dependem de t,

$$u(s,t)=\sum_{m=1}^{\infty} b_m(t)\sin\left(\frac{m\pi s}{a}\right).$$

A expressão de $b_m(t)$ em termos de u é

$$b_m(t)=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a} u(s,t)\sin\left(\frac{m\pi s}{a}\right)ds=\frac{2}{a}\int_{0}^{a} u(s,t)\sin\left(\frac{m\pi s}{a}\right)ds.$$

c) Seja $m\in\mathbb{N}_1$. Da proposição relativa à continuidade das funções definidas por integrais, b_m é contínua. Pertence, por isso, a $L^2[-b,b]$. A expressão de $b_m(t)$ em termos de u mostra que b_m é ímpar e periódica de período $2b$, porque herda estas propriedades da dependência de u na sua segunda variável. Portanto,

$$b_m(t)=\sum_{n=1}^{\infty} \beta_{m,n}\sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right).$$

A expressão de $\beta_{m,n}$ em termos de $b_m(t)$ é

$$\beta_{m,n}=\frac{1}{b}\int_{-b}^{b} b_m(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right)dt=\frac{2}{b}\int_{0}^{b} b_m(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right)dt.$$

d) Substituindo o resultado da alínea **c)** na alínea **b)**,

$$u(s,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \beta_{m,n}\sin\left(\frac{m\pi s}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right).$$

Derivando formalmente, $-(u_{ss}+u_{tt})=\lambda u$ é equivalente a

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m^2\pi^2}{a^2}+\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)\beta_{m,n}\sin\left(\frac{m\pi s}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right)$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda\beta_{m,n}\sin\left(\frac{m\pi s}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right).$$

Da unicidade dos coeficientes de Fourier,

$$\left(\frac{m^2\pi^2}{a^2}+\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)\beta_{m,n}=\lambda\beta_{m,n}.$$

Há duas possibilidades. Ou $\beta_{m,n}=0$ ou $\lambda=\frac{m^2\pi^2}{a^2}+\frac{n^2\pi^2}{b^2}$. Como, por hipótese, u não é identicamente nula, deve existir algum par (m_0,n_0) tal que a segunda igualdade se verifica. A segunda igualdade pode verificar-se para mais do que um par (m,n), mas verifica-se apenas para um número finito de pares. Por exemplo, se $a=b$ os pares $(5,0)$, $(4,3)$, $(3,4)$ e $(0,5)$ conduzem a $\lambda=\frac{25\pi^2}{a^2}$. Para pares (m,n) para os quais $\lambda\neq\frac{m_0^2\pi^2}{a^2}+\frac{n_0^2\pi^2}{b^2}$ os coeficientes $\beta_{m,n}$ anulam-se. Para $\lambda=\frac{m_0^2\pi^2}{a^2}+\frac{n_0^2\pi^2}{b^2}$ a função u é

$$u(s,t)=\sum_{\substack{(m,n)\ \text{tal que}\\ \frac{m^2\pi^2}{a^2}+\frac{n^2\pi^2}{b^2}=\frac{m_0^2\pi^2}{a^2}+\frac{n_0^2\pi^2}{b^2}}}\beta_{m,n}\sin\left(\frac{m\pi s}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right).$$

Esta expressão foi deduzida assumindo que existia solução. Imediatamente se verifica que é, de facto, uma solução para $\lambda=\frac{m_0^2\pi^2}{a^2}+\frac{n_0^2\pi^2}{b^2}$.

e) Combinando os resultados das alíneas **c)** e **b)**,

$$\beta_{m,n}=\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a u(s,t)\sin\left(\frac{m\pi s}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right)ds\,dt.$$

Usando a equação de Helmholtz, e integrando duas vezes por partes nos integrais dentro dos parêntesis rectos,

$$\begin{aligned}
\lambda\beta_{m,n} &= \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a \lambda u(s,t)\sin\Big(\frac{m\pi s}{a}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi t}{b}\Big)\,ds\,dt \\
&= -\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a (u_{ss}(s,t)+u_{tt}(s,t))\sin\Big(\frac{m\pi s}{a}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi t}{b}\Big)\,ds\,dt \\
&= -\frac{4}{ab}\int_0^b\left[\int_0^a u_{ss}(s,t)\sin\Big(\frac{m\pi s}{a}\Big)\,ds\right]\sin\Big(\frac{n\pi t}{b}\Big)\,dt \\
&\quad -\frac{4}{ab}\int_0^a\left[\int_0^b u_{tt}(s,t)\sin\Big(\frac{n\pi t}{b}\Big)\,dt\right]\sin\Big(\frac{m\pi s}{a}\Big)\,ds \\
&= \frac{m^2\pi^2}{a^2}\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a u(s,t)\sin\Big(\frac{m\pi s}{a}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi t}{b}\Big)\,ds\,dt \\
&\quad +\frac{n^2\pi^2}{b^2}\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a u(s,t)\sin\Big(\frac{m\pi s}{a}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi t}{b}\Big)\,ds\,dt \\
&= \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2}+\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)\beta_{m,n}.
\end{aligned}$$

Isto prova rigorosamente o resultado obtido na alínea anterior.