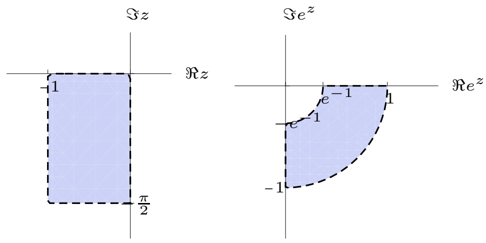
Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Exame - 15 de Janeiro de 2009

LEAmb, LEMat, MEBiol e MEQ

Resolução

1. Tem-se $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. Assim, e^z tem módulo e^x e argumento y. A imagem pedida consiste no conjunto dos complexos cujo módulo está entre e^{-1} e $1 = e^0$, e cujo argumento está entre $-\frac{\pi}{2}$ e 0.



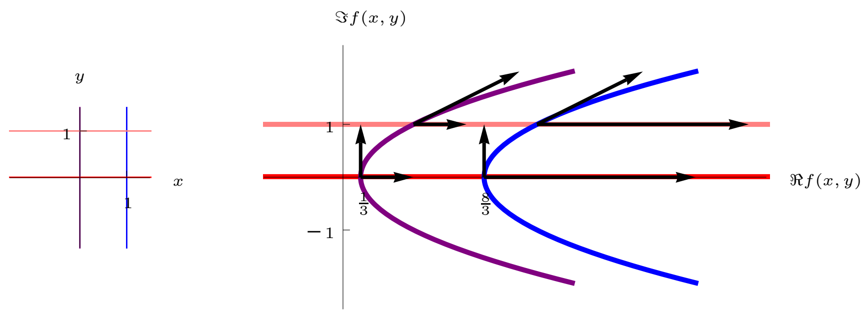
2. A função f tem derivadas parciais contínuas pelo que é diferenciável como função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Portanto, será diferenciável no sentido complexo sse satisfizer a equação de Cauchy-Riemann, $f_x = -if_y$. Ora, $f_x = (x+1)^2$ e $f_y = 2y + i$, pelo que

$$\begin{aligned} f_x = -if_y \;&\Leftrightarrow\; (x+1)^2 = -i(2y+i) \;\Leftrightarrow\; (x+1)^2 = 1 - 2iy \\ &\Leftrightarrow\; \begin{cases} x+1 = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; (x,y) = (-2,0) \vee (x,y) = (0,0). \end{aligned}$$

A função f é diferenciável apenas em $(-2,0)$ e $(0,0)$, sendo a sua derivada $f' = f_x = 1$.

Se $f(x,y) = w = \Re w + i\Im w$, então

$$\begin{aligned} f(0,y) &= \tfrac{1}{3} + y^2 + iy &&\Leftrightarrow\; \Re w = \tfrac{1}{3} + (\Im w)^2 \\ f(1,y) &= \tfrac{8}{3} + y^2 + iy &&\Leftrightarrow\; \Re w = \tfrac{8}{3} + (\Im w)^2 \\ f(x,0) &= \tfrac{(x+1)^3}{3} &&\Leftrightarrow\; \Im w = 0 \\ f(x,1) &= \tfrac{(x+1)^3}{3} + 1 + i &&\Leftrightarrow\; \Im w = 1. \end{aligned}$$



O vector correspondente a $f_x(x_0, y_0)$ é tangente a $\{(f(x, y_0) : x \in \mathbb{R}\}$ em x_0, e o vector correspondente a $f_y(x_0, y_0)$ é tangente a $\{(f(x_0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ em y_0. A equação de Cauchy-Riemann traduz que o vector correspondent a f_x se obtém rodando o vector correspondente a f_y em torno de (x_0, y_0) de $\pi/2$ radianos no sentido dos ponteiros do relógio.

3. Na região $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} \\ &= \ldots - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{z}{2^2} - \frac{z^2}{2^3} - \ldots . \end{aligned}$$

Usando este resultado para calcular o integral,

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}} f(z)\, dz = -\int_{|z|=\frac{3}{2}} \left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^n}\right) dz - \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{1}{z}\, dz - \int_{|z|=\frac{3}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\right) dz.$$

O primeiro integral do segundo membro da última igualdade é nulo porque a integranda é a derivada de uma função holomorfa em $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. O terceiro integral do segundo membro da última igualdade é nulo porque a integranda é uma função holomorfa em $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$. O segundo integral vale $2\pi i$ vezes o número de rotação da circunferência de raio $\frac{3}{2}$ centrada na origem em torno de zero. Conclui-se

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}} f(z)\, dz = -2\pi i.$$

4. Trata-se de uma série de potências de z, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, com $a_n = \frac{2^n}{n^3}$. O raio de convergência é dado por $R = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ sempre que este limite existe. Logo,

$$R = \lim \left(\frac{2^n}{n^3}\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{2}.$$

Se $|z| = \frac{1}{2}$, então a série dos módulos é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}|z|^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} < \infty,$$

porque é uma série de Dirichlet, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, com $\alpha > 1$. Logo a série do enunciado é absolutamente convergente sobre a fronteira do disco de convergência.

Do teorema relativo a diferenciabilidade das séries de potências, sabemos que a série de potências representa uma função holomorfa no interior do disco de convergência. Uma função diz-se holomorfa num ponto se é diferenciável numa vizinhança desse ponto. A série de potências não é holomorfa em $|z| = \frac{1}{2}$ porque nem sequer converge para $|z| > \frac{1}{2}$.

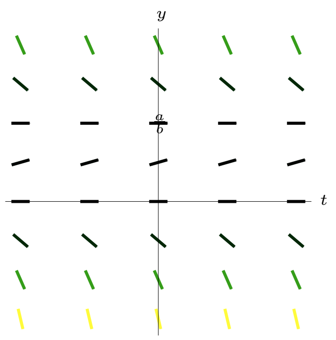
Observação. Pode provar-se que o seguinte limite existe e tem o valor indicado

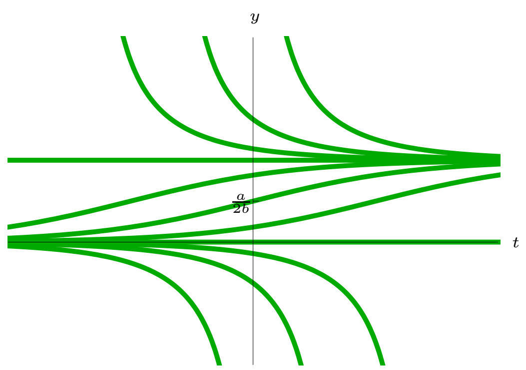
$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ |z|\le 1/2}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}z_0^{n-1}.$$

De facto, isto segue facilmente de tanto a série de potências como a sua derivada formal serem uniformemente convergentes em $|z| \le \frac{1}{2}$.

5.

a) Os declives dos gráficos das soluções são constantes para y constante. Para $y = 0$ e para $y = \frac{a}{b}$, tem-se $y' = 0$. Para y entre 0 e $y = \frac{a}{b}$, tem-se $y' > 0$, sendo que o máximo de y' ocorre para $y = \frac{a}{2b}$. Para $y < 0$ e para $y > \frac{a}{b}$, tem-se $y' < 0$, sendo que $y' \to -\infty$ quando $|y| \to +\infty$.





b) Dividindo ambos os membros da equação por $-y^2$ obtém-se

$$-\frac{y'}{y^2}+\frac{a}{y}=b.$$

Pelo teorema relativo à derivada da função composta, $z'=-\frac{y'}{y^2}$. Logo,

$$z'+az=b.$$

c) O factor integrante da equação diferencial para z é e^{at}. Multiplicando ambos os membros da equação pelo factor integrante,

$$e^{at}z'+ae^{at}z=be^{at}.$$

Reconhecemos no primeiro membro a derivada do factor integrante vezes z,

$$\frac{d}{dt}\big(e^{at}z\big)=be^{at}.$$

Integrando de 0 a t,

$$e^{at}z(t)-z_0=\frac{b}{a}\big(e^{at}-1\big)\ \Leftrightarrow\ z(t)=z_0e^{-at}+\frac{b}{a}\big(1-e^{-at}\big).$$

Relembrando que $y=\frac{1}{z}$ e designando por y_0 o valor de $y(0)$, para $y_0\neq 0$

$$y(t)=\frac{1}{\frac{1}{y_0}e^{-at}+\frac{b}{a}\big(1-e^{-at}\big)}=\frac{y_0a}{ae^{-at}+y_0b\big(1-e^{-at}\big)}.$$

[A última expressão é também válida para $y_0=0$ (embora a penúltima não seja). De facto, para $y_0=0$ tem-se $y(t)\equiv 0$]. Mais geralmente, a solução da equação diferencial para y que satisfaz $y(t_0)=y_0$ é

$$y(t)=\frac{y_0a}{ae^{-a(t-t_0)}+y_0b\big(1-e^{-a(t-t_0)}\big)}.$$

Esta igualdade é válida enquanto o denominador não se anular. Isso acontece quando

$$t=t_*:=t_0+\frac{1}{a}\ln\frac{by_0-a}{by_0}.$$

O argumento do logaritmo é positivo quando $y_0<0$ e quando $y_0>\frac{a}{b}$. Se $y_0<0$, então $t_*>t_0$ e a solução existe para $t\in]-\infty,t_*[$. Se $0\leq y_0\leq\frac{a}{b}$, então a solução está definida em $\mathbb{R}$. Se $y_0>\frac{a}{b}$, então $t_*<t_0$ e a solução existe para $t\in]t_*,+\infty[$.

6.

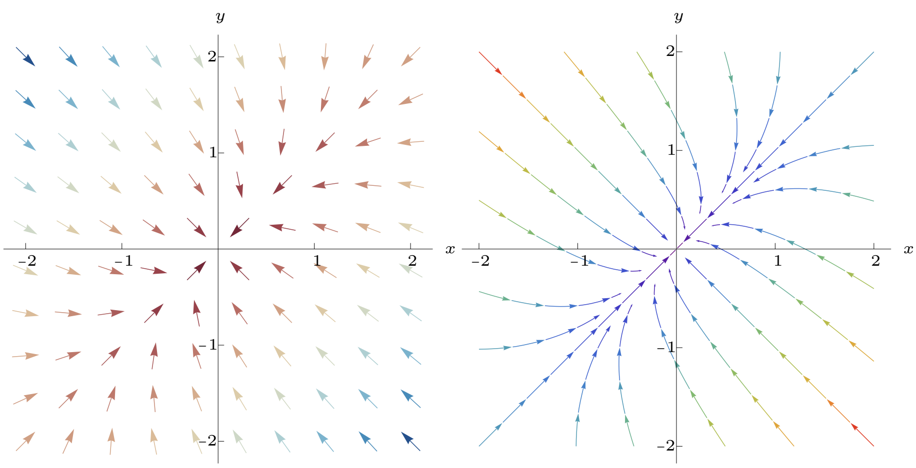
a) O polinómio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda + 1)(\lambda + 3)$. Os valores próprios são -1 e -3. A -1 está associado o vector próprio $(1, 1)$ e a -3 o vector próprio $(1, -1)$. Podemos tomar

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

A matriz S é orthogonal e $S^{-1} = S^T = S$. A solução com a condição inicial X_0 é

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{At}X_0 = Se^{\Lambda t}S^{-1}X_0 \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} x_0 + y_0 \\ x_0 - y_0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{x_0 + y_0}{2} e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{x_0 - y_0}{2} e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b) Se $y_0 \neq -x_0$, ou seja a condição inicial não é um múltiplo de $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, então para t grande a componente de $X(t)$ segundo $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ é muito menor do que a componente de $X(t)$ segundo $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, porque e^{-3t} é muito menor que e^{-t}. Como visto nas aulas, isto implica que as trajectórias $X(t)$ que não começam sobre a direcção própria correspondente a $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ tendem para zero tangentes à recta $y = x$.



7. Estendemos a função a $[-l, l] \times [0, \infty[$ como função par de x porque as condições fronteira são de Neumann. Para cada $t \geq 0$ fixo, a função u pode ser desenvolvida em série de Fourier. Os coeficientes dependerão de t. Como escolhemos a extensão que é função par de x,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \cos\Big(\frac{n\pi x}{l}\Big).$$

Substituindo na equação diferencial

$$u_t = 5u_{xx} \;\Leftrightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n'(t) \cos\Big(\frac{n\pi x}{l}\Big) = -5\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \frac{n^2\pi^2}{l^2} \cos\Big(\frac{n\pi x}{l}\Big).$$

Uma função tem apenas uns coeficientes de Fourier,

$$a_n'(t) = -5\frac{n^2\pi^2}{l^2} a_n(t) \;\Leftrightarrow\; a_n(t) = c_n e^{-\frac{5n^2\pi^2 t}{l^2}}.$$

Logo,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\frac{5n^2\pi^2 t}{l^2}} \cos\Big(\frac{n\pi x}{l}\Big).$$

Falta garantir

$$u(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\Big(\frac{n\pi x}{l}\Big) = u_0(x).$$

A função u foi estendida como função par de x pelo que a restrição de u a $t = 0$, ou seja u_0, também deve ser estendida a $[-l, l]$ como função par. Os coeficientes c_n são os coeficientes de Fourier da extensão de u_0, ainda designada por u_0. Assim, para $n > 0$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} u_0(x) \cos\Big(\frac{n\pi x}{l}\Big)\, dx \;=\; \frac{2}{l}\int_{0}^{l} u_0(x) \cos\Big(\frac{n\pi x}{l}\Big)\, dx \\ &= \frac{2}{l}\int_{0}^{\frac{l}{2}} \cos\Big(\frac{n\pi x}{l}\Big)\, dx \;=\; \frac{2}{n\pi} \sin\Big(\frac{n\pi x}{l}\Big)\Big|_0^{\frac{l}{2}} \;=\; \frac{2}{n\pi}\sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big). \end{aligned}$$

Para $n = 0$,

$$c_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} u_0(x)\, dx = \frac{1}{l}\int_{0}^{l} u_0(x)\, dx = \frac{1}{2}.$$

A temperatura é dada por

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{\pi}\left[e^{-\frac{5\pi^2 t}{l^2}} \cos\big(\tfrac{\pi x}{l}\big) - \frac{e^{-\frac{5.9.\pi^2 t}{l^2}}}{3} \cos\big(\tfrac{3\pi x}{l}\big) + \frac{e^{-\frac{5.25.\pi^2 t}{l^2}}}{5} \cos\big(\tfrac{5\pi x}{l}\big) + \ldots \right].$$

8. Podemos escrever a equação diferencial na forma

$$(D^2+1)u = \frac{1}{p^2}.$$

Se u é solução desta equação então u satisfaz

$$D(D^2+1)u = 0 \;\Leftrightarrow\; u = c_1\cos\theta + c_2\sin\theta + c_3,$$

mas não inversamente. Vamos determinar quais destas funções satisfazem a equação original. Substituindo na equação original,

$$(D^2+1)(c_1\cos\theta + c_2\sin\theta + c_3) = \frac{1}{p^2} \;\Leftrightarrow\; (D^2+1)c_3 = \frac{1}{p^2} \;\Leftrightarrow\; c_3 = \frac{1}{p^2}.$$

A solução geral da equação diferencial do enunciado é

$$u = c_1\cos\theta + c_2\sin\theta + \frac{1}{p^2} = \sqrt{c_1^2+c_2^2}\cos(\theta-\varphi) + \frac{1}{p^2},$$

com $\varphi = \arg(c_1 + ic_2)$. Como quando $\theta = 0$ a partícula está no ponto mais próximo do centro de atracção, u tem um máximo em $\theta = 0$. Ora, os máximos de $\theta \mapsto \cos(\theta-\varphi)$ acontecem em $\theta = \varphi$ mais um múltiplo inteiro de 2π. Assim $\arg(c_1 + ic_2) = 0$, ou seja $c_1 \geq 0$ e $c_2 = 0$. Tem-se

$$u = c_1\cos\theta + \frac{1}{p^2}.$$

Finalmente, para determinar c_1 usamos o facto de $\theta = 0$ impicar $u = \frac{1}{r_0}$:

$$\frac{1}{r_0} = c_1 + \frac{1}{p^2} \;\Leftrightarrow\; c_1 = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{p^2}.$$

Para que $c_1 \geq 0$ deverá ser $p^2 \geq r_0$. A expressão de r em função de θ é

$$r = \frac{1}{\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{p^2}\right)\cos\theta + \frac{1}{p^2}} = \frac{p^2}{\left(\frac{p^2}{r_0} - 1\right)\cos\theta + 1}.$$

Esta igualdade é válida enquanto o denominador não se anular. Isso acontece quando

$$\cos\theta = -\frac{1}{\frac{p^2}{r_0} - 1}.$$

Se $r_0 \leq p^2 < 2r_0$, então a solução está definida em $\mathbb{R}$. Se $p^2 \geq 2r_0$, então a solução existe para $|\theta| < \pi - \arccos\frac{r_0}{p^2 - r_0}$.