

# Análise Complexa e Equações Diferenciais

30 de Janeiro de 2017

LEMat e MEAer

1° Teste – Perguntas 1 – 4 – 90 minutos

2° Teste – Perguntas 5 – 8 – 90 minutos

Exame – Todas as perguntas – 3 horas

## Apresente os cálculos

1. Esboce o conjunto  $\{z \in \mathbb{C} : |z + \frac{1}{2}| > \frac{1}{2} \text{ e } \Re z < 1\}$  e a sua imagem pela transformação de Möbius  $z \mapsto \frac{8z-2}{z+2}$ .

2. Considere a função  $f : \{z \in \mathbb{C} : |\Im z| > 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por (2.5)

$$f(x + iy) = \sqrt{y^2 - 1} e^{ix}.$$

Estude a diferenciabilidade de  $f$  e calcule a sua derivada. Simplifique o resultado.

3. Calcule usando integrais complexos (3)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{12x^2}{(1+x^2)(25+x^2)} dx,$$

justificando cuidadosamente.

4. Seja  $p$  o polinómio de grau  $n$  com raízes complexas  $a_1, \dots, a_n$  e coeficiente da potência de maior grau igual a  $\alpha$ , ou seja, (2)

$$p(z) = \alpha(z - a_1) \dots (z - a_n).$$

Mostre que as raízes de  $p'$  estão contidas no conjunto  $\{z \in \mathbb{C} : z = \sum_{i=1}^n l_i a_i\}$ , onde  $0 \leq l_i \leq 1$  e  $\sum_{i=1}^n l_i = 1$ , i.e. no invólucro convexo das raízes de  $p$ . Sugestão: calcule  $p'/p$ .

5. Determine a solução de (2)

$$y' = e^{-4t+5y} + te^{5y}$$

que satisfaz  $y(0) = 0$ .

6. Resolva a equação diferencial não homogénea (1.5)

$$y'' - y' - 6y = e^{-2t} + 1$$

usando o método do aniquilador.

7. Considere o problema (3.5)

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{para } (x, y) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi], \\ u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = 0 & \text{para } y \in [0, 2\pi], \\ u(x, 0) = 0 & \text{para } x \in [0, \pi], \\ u(x, 2\pi) = f(x) & \text{para } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Prolongue a solução de forma conveniente e, para cada  $y$  fixo, desenvolva o prolongamento em série de Fourier. Determine uma solução.

8. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que não comutam ( $[A, B] := AB - BA = B$ ).

a) Calcule as exponenciais  $e^{\alpha A}$  e  $e^{\beta B}$ . (2)

b) Determine o valor de  $s$  tal que (1)

$$e^{\alpha A} e^{\beta B} = e^{\alpha A + s\beta B}.$$