Análise Complexa e Equações Diferenciais

Exame - 22 de Janeiro de 2021

MEAer

Duração: 1 hora

Apresente os cálculos

1. Escreva a versão melhorada do Teorema de Cauchy e, a partir desta, deduza a Fórmula Integral de Cauchy, enunciando as condições em que é válida. (1)

2. Considere a função $x \mapsto \cos^2 x$, pertencente ao espaço das funções reais cujo quadrado é integrável à Lebesgue no intervalo $(-\pi, \pi)$, que designámos por $L^2(-\pi, \pi)$, com produto interno $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$. Calcule a sua projecção no espaço gerado por $\{\sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x)\}$. Justifique. (1)

3. Considere o problema de valor inicial (1)

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y), \\ y(t_0) &= y_0, \end{aligned}$$

onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe C^1. Seja I um intervalo aberto contendo t_0. Prove directamente (sem usar o Teorema de Picard-Lindelöf) que se y e z são duas soluções de classe C^1 definidas em I, então y e z coincidem em I.

4. Considere o sistema (1)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & \text{para } (x,t) \in (0,\pi) \times (0, +\infty), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & \text{para } t \in (0, +\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{para } x \in (0,\pi), \end{cases}$$

onde a função u_0 é dada, de classe $C^2([0,\pi])$, satisfazendo $u_0(0) = u''(0) = u_0(\pi) = u_0''(\pi) = 0$. Prove que não pode ter mais do que uma solução $C^2([0,\pi] \times [0,\infty))$. Sugestão: multiplique ambos os membros da equação do calor por u e integre.

5. Seja f inteira. Como sabe, existem a_n e b_n reais tais que (1)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) z^n.$$

Suponha que existem $\lambda \geq 0$ e $C > 0$ tais que

$$\forall_{z \in \mathbb{C}} \quad |\mathrm{Re}\, f(z)| \leq C(1 + |z|^\lambda).$$

Prove que f é um polinómio de grau não superior a $\lfloor \lambda \rfloor$, onde $\lfloor \lambda \rfloor$ é o maior inteiro não superior a λ.