Análise Complexa e Equações Diferenciais

27 de Junho de 2016

LEGM e MEC

1º Teste	–	Perguntas $1 - 4$	–	90 minutos
2º Teste	–	Perguntas $5 - 9$	–	90 minutos
Exame	–	Todas as perguntas	–	3 horas

Apresente os cálculos

1. Considere a transformação de Möbius $z \mapsto \frac{z+1}{z-1}$.

a) Calcule a imagem de $\frac{1-i}{2}$. (0.5)

b) Esboce o conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ \Re z > 0 \text{ e } \Im z < 0\}$ e a sua imagem pela transformação. (1.5)

2. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{x + i0 : x \leq 0\} \to \mathbb{C}$, definida por (1.5)

$$f(re^{i\theta}) = 4 \arctan r + i\theta.$$

Estude a diferenciabilidade de f e calcule a sua derivada.

3. Calcule e simplifique o resultado:

a) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{i}{2}} 2z \log(2z)\, dz$ ao longo de uma curva estritamente contida no primeiro quadrante. (1.5)

b) O desenvolvimento de $\frac{1}{2+z}$ em torno de zero, indicando a região onde é válido. (1)

c) O desenvolvimento de $z^4 \sin \frac{1}{z}$ em torno de $z = 0$, indicando a região onde é válido. Classifique a singularidade $z = 0$ e calcule o resíduo da função em zero. Calcule ainda $\int_{|z|=2\pi} z^4 \sin \frac{1}{z}\, dz$ com a curva descrita no sentido directo. (1.5)

d) (1.5)

$$\int_{|z-4|=2} \frac{1}{z(z-3)^2(z-7)}\, dz,$$

com a curva descrita no sentido directo, usando a Fórmula Integral de Cauchy.

4. Enuncie o Teorema de Cauchy e prove-o para funções de classe C^1 e curvas de Jordan que são fronteira de conjuntos regulares. (1)

5. Considere a equação diferencial $y' = y^2$

a) Esboce o seu campo de direcções e os gráficos das soluções. (1)
b) Resolva a equação com condição inicial $y(1) = -1$. (2)

6. Resolva a equação diferencial não homogénea (2)

$$y'' - 3y' + 2y = 4te^{3t}$$

usando o método do aniquilador.

7. Considere o problema (2)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u & \text{para } (x,t) \in [0,\pi] \times [0,+\infty[, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & \text{para } t \in [0,+\infty[, \\ u(x,0) = 3 - 5\cos(7x) & \text{para } x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Prolongue a solução de forma conveniente e, para cada t fixo, desenvolva o prolongamento em série de Fourier. Determine uma solução.

8. Considere a equação diferencial (2)

$$(8x - y + 6) - 3(x+1)y' = 0.$$

Determine um factor integrante da forma $\mu = \mu(2x - y)$. Resolva a equação. Não precisa de apresentar as soluções na forma explícita. Sugestão: Para determinar o potencial ϕ, primitive ambos os membros da equação para ϕ_y e substitua o resultado na equação para ϕ_x.

9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e período 2π. Relacione os coeficientes de Fourier de f e de f', provando rigorosamente o resultado. (1)