Análise Complexa e Equações Diferenciais

25 de Janeiro de 2016

LEGM e MEC

1º Teste	–	Perguntas 1 – 5	– 90 minutos
2º Teste	–	Perguntas 6 – 9	– 90 minutos
Exame	–	Todas as perguntas	– 3 horas

Apresente os cálculos

1. Esboce o conjunto $\{z \in \mathbb{C} : e^{-1} < |z| < e,\ \text{e } \Im z > 0 \text{ ou } \Re z < 0\}$ e a sua imagem por $z \mapsto \log z$, onde log designa o logaritmo principal. (1)

2. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, definida por $f(re^{i\theta}) = \ln r - i\cos\theta$. Estude a diferenciabilidade de f e calcule a sua derivada. (1.5)

3. Calcule e simplifique o resultado:

a) $\int_0^i z^2 e^{\pi z}\, dz$ (tendo cuidado com os sinais). (1.5)

b) $\int_C 1/\overline{z}\, dz$ usando a definição de integral, onde C é a semi-circunferência centrada na origem com início em 2 e fim em -2, no semi-plano em que a parte imaginária de z é não negativa. (1)

c) O desenvolvimento de $z \mapsto z^3 e^{\frac{3}{z}}$ em série de Laurent em torno de $z = 0$, indicando a região onde é válido. Classifique a singularidade $z = 0$ e calcule o resíduo da função no ponto 0. (1.5)

4. Calcule (2.5)

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(x)}{x^2 + 4}\, dx.$$

5. A partir de uma hipótese adequada, deduza a equação de Cauchy-Riemann. (1)

6. Considere o problema de valor inicial

$$y' = (y^2 + 1)\tan t \quad \text{e} \quad y(0) = 1,$$

a) Resolva o problema, simplificando tanto quanto possível a expressão final. (2)

b) Qual o domínio da solução? (1)

7. Considere a equação diferencial (2)

$$(5y + 5y^2) + (3x + 4xy)y' = 0.$$

Determine um factor integrante da forma $\mu = \mu(x^2 y)$. Resolva a equação. Não precisa de apresentar as soluções na forma explícita.

8. Seja

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule a solução do problema de valor inicial $X' = AX$ e $X(0) = X_0$. (1.5)

b) Esboce o retrato de fase do sistema $X' = AX$, tendo em atenção o comportamento assimptótico das soluções quando $t \to +\infty$. (1)

9. Considere o problema (2.5)

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & \text{para } (x,t) \in [0,\pi] \times [0,+\infty[, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{para } t \in [0,+\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{para } x \in [0,\pi], \\ u_t(x,0) = \sin(2x) & \text{para } x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Assuma que o problema tem uma solução. Prolongue a solução de forma conveniente e, para cada t fixo, desenvolva o prolongamento em série de Fourier. Determine formalmente uma solução.