# Análise Complexa e Equações Diferenciais

27 de Janeiro de 2014

LEGM e MEC

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1º Teste | – | Perguntas 1 – 4 | – | 90 minutos |
| 2º Teste | – | Perguntas 5 – 8 | – | 90 minutos |
| Exame | – | Todas as perguntas | – | 3 horas |

**Apresente os cálculos**

**1.** Esboce o conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \Re z < 0 \text{ e } |z| < 1\}$ e a sua imagem por $z \mapsto \frac{1}{z+1}$. (1.5)

**2.** Esboce o conjunto $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re z < 1\}$ e a sua imagem por $z \mapsto \log z$, onde o logaritmo é o principal. (1)

**3.** Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, definida por $f(re^{i\theta}) = -\frac{1}{r^2} + i\theta$ para $r > 0$ e $-\pi < \theta \leq \pi$. Estude a continuidade de $f$. Estude a diferenciabilidade de $f$ e calcule a sua derivada. (1.5)

**4.** Calcule e simplifique o resultado:

**a)** $\int_0^{2+i} \frac{1}{(z-2)^3}\, dz$. (1)

**b)** $\int_L e^{\overline{z}}\, dz$, onde $L$ é o segmento de recta com início em 1 e fim em $2+i\pi$. (1)

**c)** $\int_{|z-\pi|=\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\frac{\pi}{z}}}{z-\pi}\, dz$. (1.5)

**d)** O desenvolvimento de $\frac{1}{z-\pi}$ em série de Taylor em torno de $z = 0$, indicando a região onde é válido. (1.5)

**e)** $\int_{|z|=\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\frac{\pi}{z}}}{z-\pi}\, dz$. Classifique a singularidade $z = 0$. (1)

**5.** Considere a equação diferencial

$$y' = e^{2y}.$$

**a)** Esboce o seu campo de direcções e os gráficos das soluções. (1.5)

**b)** Determine a solução que satisfaz $y(0) = y_0$, simplificando a expressão final. Qual o domínio da solução? (1.5)

**6.** Considere a equação diferencial (1.5)

$$(2e^{-x} + 3e^{-y}) + (3e^{-x} + 2e^{-y})y' = 0.$$

Determine um factor integrante da forma $\mu = \mu(x + y)$. Resolva a equação. Não precisa de apresentar as soluções na forma explícita.

**7.** Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

**a)** Calcule $e^{At}$ na forma $Se^{\Lambda t}S^{-1}$ ou na forma $Se^{Jt}S^{-1}$. (1.5)

**b)** Esboce o retrato de fase do sistema $X' = AX$. Sugestão: Se $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, então $AX = (x - y)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. (1)

**8.** Para cada $n \in \mathbb{N}_1$, seja $f_n : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ contínua.

**a)** Determine a solução da equação diferencial ordinária de primeira ordem linear não homogénea para a função $b_n : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$, (1.5)

$$b_n'(t) = -n^2 b_n(t) + f_n(t),$$

que satisfaz $b_n(0) = c_n$.

Assuma que a série de Fourier $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin(nx)$ converge. Seja ainda $u_0 : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ uma função regular. Considere o problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin(nx) & \text{para } (x,t) \in [0,\pi] \times [0,+\infty[, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{para } t \in [0,+\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{para } x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

**b)** Assuma que o problema tem uma solução. Prolongue a solução de forma conveniente e, para cada $t$ fixo, desenvolva o prolongamento em série de Fourier. Determine equações diferenciais ordinárias para os coeficientes da série. Determine formalmente uma solução. (1.5)