Análise Complexa e Equações Diferenciais

28 de Janeiro de 2013

LMAC, MEBiom e MEFT

1º Teste	–	Perguntas 1 – 5	–	90 minutos
2º Teste	–	Perguntas 6 – 10	–	90 minutos
Exame	–	Todas as perguntas	–	3 horas

Apresente os cálculos

1. Seja $\mu > 0$. Determine os valores de z tais que $z^3 = i\mu^3$. Apresente as soluções na forma cartesiana e simplifique os resultados. (1)

2. Esboce a região $\left\{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{1}{2} \text{ e } \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2} \text{ e } \Im z < 1\right\}$ e a sua imagem por $z \mapsto \frac{1}{z}$. (2)

3. Determine o conjunto dos pontos onde a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por (1.5)

$$f(x+iy) = -(x+1)e^{iy} + i(x-1)e^{-iy},$$

é diferenciável.

4. Calcule:

a) O integral $\int_\gamma e^{\overline{z}}\, dz$, onde γ é o segmento de recta com início em $-i\pi$ e fim em π. Simplifique o resultado. (1.5)

b) O integral (1.5)

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z - 1}{z^4}\, dz,$$

usando as Fórmulas Integrais de Cauchy, em que a circunferência é descrita uma vez no sentido directo.

c) O desenvolvimento em série de Laurent da função integranda na alínea anterior com centro no ponto zero, identificando a região onde é válido. Classifique as singularidades da função. (1.5)

5. Seja f uma função inteira. Justifique as seguintes afirmações ou apresente um contra-exemplo.

a) Se f é limitada num semi-plano, então f é constante. (0.5)

b) Se f é limitada no exterior de uma bola, então f é constante. (0.5)

6. Considere a equação diferencial (1.5)

$$(2e^{3y} + e^{-x-y}) + (3e^{3y} - e^{-x-y})y' = 0.$$

Determine um factor integrante da forma $\mu = \mu(x)$. Resolva a equação. Não precisa de apresentar as soluções na forma explícita.

7. Determine a solução de (1.5)

$$y'' + 4y = 4t^2 - 2$$

que satisfaz $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$.

8. Seja (1.5)

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{8}{5} & -\frac{1}{5} \\ +\frac{4}{5} & -\frac{12}{5} \end{bmatrix}.$$

Calcule e^{At} na forma $Se^{Jt}S^{-1}$. Se possível, deve usar o vector próprio generalizado ortogonal ao vector próprio que escolher.

9. Seja A uma matriz 2×2 com vector próprio v e vector próprio generalizado w, isto é, $(A - \lambda I)v = 0$ e $(A - \lambda I)w = v$. Determine as soluções do sistema $X' = AX$ da forma $X(t) = c(t)v + d(t)w$, onde c e d são funções reais. (1.5)

10. Seja $l > 0$. Considere o problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{para } (x,t) \in [0,l] \times [0,+\infty[, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & \text{para } t \in [0,+\infty[, \\ u(x,0) = f(x) & \text{para } x \in [0,l]. \end{cases}$$

A função f é a função periódica, de período igual a $2l$, que satisfaz

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} - \frac{x}{2l} & \text{se } -l \le x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ +\frac{1}{2} - \frac{x}{2l} & \text{se } 0 < x \le l, \end{cases}$$

- **a)** Esboce o gráfico de f. Calcule o desenvolvimento de f em série de Fourier. (1.5)
- **b)** Determine formalmente a solução do problema. (1.5)
- **c)** Seja $\epsilon > 0$. A série que obteve na alínea **b)** converge uniformemente em $[0,l] \times [\epsilon,+\infty[$? Justifique. (0.5)
- **d)** A série que obteve na alínea **b)** converge uniformemente em $[0,l] \times [0,+\infty[$? Justifique. (0.5)