Análise Complexa e Equações Diferenciais

11 de Janeiro de 2010

LMAC, MEBiom e MEFT

2º Teste –	Perguntas 4, 5, 6	– 90 minutos
1º Exame –	Todas as perguntas	– 3 horas

Apresente os cálculos

1. Calcule, simplificando o resultado,

a) $\log\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$, onde o logaritmo é o principal. (1)

b) $\int_0^{i\pi} z e^z \, dz$. (1)

c) $\int_{|z|=2\pi} \frac{e^z}{z^2+\pi^2} \, dz$; classifique as singularidades da função integranda. (2)

d) o desenvolvimento em série de Laurent de $\frac{1}{z-2}+e^{z+2}$, válido para $|z|>2$. (2)

2. Esboce a imagem da região $\{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$ por $z\mapsto\frac{1}{z+2}$. (2)

3. Considere a função $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definida por $f(re^{i\theta}) = r+i\theta$, onde $r>0$ e $-\pi<\theta\le\pi$, e $f(0)=0$.

a) Determine o contradomínio de f. A função é contínua na origem? (0.5)

b) Estude a diferenciabilidade de f e calcule a derivada de f. Justifique. (1.5)

4. Considere a equação diferencial $y' = \tan y$.

a) Esboce o seu campo de direcções e os gráficos das soluções. Escolha um ponto $(t_0, y_0)\in\mathbb{R}^2$ com $0<y_0<\frac{\pi}{2}$. Identifique o gráfico da solução com condição inicial $y(t_0)=y_0$. (2)

b) Determine explicitamente a solução da equação diferencial com condição inicial como na alínea anterior. Qual o seu domínio? (1.5)

5. As herdades vedadas e contíguas A e B têm populações de coelhos com números de indivíduos x e y, respectivamente. As taxas de reprodução dos coelhos em A e B são de 10% e 25% por ano, respectivamente. Há uma pequena abertura na vedação entre A e B, através do qual passam alguns coelhos. O resultado deste fluxo é que, se há mais coelhos em B do que em A, passam por ano 10% do excedente de coelhos, entre B e A, de B para A. Inversamente, se há mais coelhos em A do que em B, passam por ano 10% do excedente de coelhos, entre A e B, de A para B.

a) Verifique, justificando, que o número de coelhos é modelado pelo sistema (0.5)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

b) Determine a solução do sistema com condição inicial $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$. (2.5)

Nota: $\sqrt{0.0625} = 0.25$.

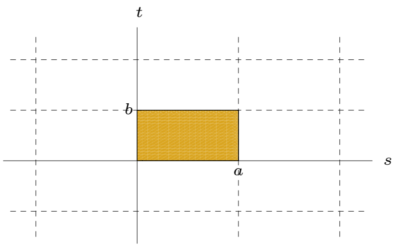
c) Esboce o retrato de fase do sistema. (0.5)

6. Considere o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = -(u_{ss} + u_{tt}) = \lambda u & \text{em } [0,a] \times [0,b], \\ u = 0 & \text{sobre } \partial([0,a] \times [0,b]), \end{cases}$$

para o parâmetro λ e a função u, que consiste na equação diferencial de Helmholtz com condições de Dirichlet homogéneas, cujas soluções são os valores e as funções próprias do Laplaciano, definido no espaço $\{u \in C^2([0,a] \times [0,b]) : u = 0 \text{ sobre } \partial([0,a] \times [0,b])\}$.

a) Seja u uma solução. Diga como pode estender u a $\mathbb{R}^2$ de forma a obter uma função (ainda designada por u) de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ e satisfazendo a equação de Helmholtz em todo o espaço. (0.5)



b) Para cada t fixo, a extensão de u pode ser expandida em série de Fourier. Claramente, tem-se (0.5)

$$u(s,t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m(t) \sin\left(\frac{m\pi s}{a}\right).$$

Porquê? Qual a expressão de $b_m(t)$ em termos de u?

c) Para cada $m \in \mathbb{N}_1$, $b_m(t)$ pode ser expandida em série de Fourier em série de Fourier. Claramente, tem-se (0.5)

$$b_m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{m,n} \sin\left(\frac{n\pi t}{b}\right).$$

Porquê? Qual a expressão de $\beta_{m,n}$ em termos de $b_m(t)$?

d) Substituindo o resultado da alínea **c)** na alínea **b)**, escreva uma série de Fourier a duas variáveis para u. Substitua agora o resultado obtido na equação diferencial e, derivando formalmente, determine os valores de λ para os quais o sistema tem soluções não triviais. Quais são essas soluções? (1)

e) Prove rigorosamente o resultado obtido na alínea anterior. Sugestão: Use a expressão para $\lambda\beta_{m,n}$ em termos de u. (0.5)