Análise Matemática II

2^{o} Semestre de 2001/02
Electricidade e Gestão
Exercícios para as aulas práticas
Turmas 11101+14109+10

I Revisões sobre diferenciabilidade (4-8/3/2002)

1. (Exame de AMI de LEFT e LMAC de 17.1.2002) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ positiva e diferenciável e seja $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = f(\log x) \cdot \log[f(x)]$. Mostre que se $f(1) = 1$, então $\varphi'(1) = f(0)f'(1)$.

2. (Exame de AMI da LEIC de 17.1.2002) Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ uma função tal que
$$\forall_{x\in[-1,1]} |f(x)| \leq x^2(1 - x^2).$$
   a) Mostre que f é diferenciável em 0 e diga o valor de $f'(0)$.
   b) Suponha, adicionalmente, que f é contínua em $[-1, 1]$ e três vezes diferenciável em $]-1, 1[$. Mostre que existe $c \in]-1, 1[$ tal que $f'''(c) = 0$.

3. Mostre que a equação $3x^2 - e^x = 0$ tem exactamente três soluções.

4. (Ex. 4.31 de [6]) Seja f uma função contínua num intervalo aberto que contenha os pontos 0 e 1 e tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$
$$f(1/n) = 3 - 1/n^2.$$
   a) Calcule $f(0)$.
   b) Prove que o contradomínio de f contém o intervalo $[2, 3]$.
   c) Supondo, adicionalmente, que f é indefinidamente diferenciável nalguma vizinhança da origem, determine $f^{(k)}(0)$ para todo o $k \in \mathbb{N}$ e indique se o ponto 0 é, ou não, ponto de extremo de f. *Sugestão:* poderá ser-lhe útil considerar a função definida por $\varphi(x) = f(x) + x^2 - 3$.

5. Seja f duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, com $f'' \leq c$, onde $c \in \mathbb{R}$, e $f(0) = f'(0) = 0$. Mostre que $f(x) \leq cx^2/2$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

6. (Ex. 19.i) p. 508 de [3]) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} x^{x^x - 1}$.

7. Prove que f é diferenciável no ponto a sse existe $m \in \mathbb{R}$ tal que
$$f(x) = f(a) + m(x - a) + (x - a)E_1(x, a) \text{ com } \lim_{x\to a} E_1(x, a) = 0.$$
   Nestas condições $f'(a) = m$.

II Fórmula e série de Taylor (11-15/3/2002)

$\surd$ 1. Escreva as fórmulas de Taylor

a) para $x \mapsto \sin x$ em torno de 0;

b) para $x \mapsto 1 + x + 2x^2 + x^3$ em torno de 0 e de 1;

c) de terceira ordem para $x \mapsto \sqrt{x}$ em torno de 1.

$\surd$ 2. (Ex. 4.84 de [6]) Usando a fórmula de Mac-Laurin com resto de Lagrange, prove que

$$\left| e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{6}$$

para qualquer $x \in [0, 1]$.

$\surd$ 3. (Ex. 4.86 de [6]) Recorrendo à fórmula de Mac-Laurin, prove que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifique a condição $f^{(n)} \equiv 0$ é um polinómio de grau menor do que n.

4. (Teorema 5 na p. 443 de [3]) Prove o resultado seguinte. Para que o gráfico da função f (cujo domínio contém um intervalo não majorado) tenha uma assímptota à direita, é necessário e suficiente que existam e sejam finitos os limites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ (que designaremos por m),

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - mx]$ (que designaremos por b).

Verificadas estas condições, a assímptota à direita é a recta de equação $y = mx + b$.

5. Determine as assímptotas de

a) $x \mapsto x + \arctan x$.

b) $x \mapsto \log x$.

6. (Ex. 10 na p. 506 de [3]) Determine o cilindro com área total mínima, de entre todos os cilindros circulares rectos com um dado volume.

7. Obtenha os desenvolvimentos em série de Taylor de

$\surd$ a) $x \mapsto \frac{1}{2+3x}$ em torno de 0 e de 1;

$\surd$ b) $x \mapsto x \ln(x)$ em torno de 2;

c) $x \mapsto \sqrt[3]{4 + x^2}$ em torno de 0;

$\surd$ d) $x \mapsto \arctan x^2$ em torno de 0.

$\surd$ 8. Dê uma expressão para a função $x \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}(x+2)^{3n}$ que não envolva somatórios.

III-V Primitivação (18-22 e 25-27/3/2002, 2-5/4/2002)

1. Calcule

$\int \sqrt{2x+3}\,dx,$	$\int \frac{dx}{(2x-3)^2},$	$\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx,$	
$\int \frac{\sin\theta}{\sqrt{1+\cos\theta}}\,d\theta,$	$\int 2^x\,dx,$	$\int \frac{dt}{1+9t^2},$	
$\int \sin^2 x\,dx,$	$\int \sin^3 x\,dx,$	$\int \tan x\,dx,$	
$\int \sec^2 x\,dx,$	$\int \sec x\,dx,$	$\int \cos^4 x\,dx,$	(fim da 1ª aula)
$\int \frac{1}{x\ln(2x)}\,dx,$	$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx,$	$\int \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\,dx,$	
$\int \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx,$	$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}},$	$\int \frac{dx}{1-x^2},$	
$\int \frac{x}{x^2+4x-5}\,dx,$	$\int \frac{dx}{x(x+1)^2},$	$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)},$	(fim da 2ª aula)
$\int \ln x\,dx,$	$\int x^2 e^x\,dx,$	$\int e^x \cos x\,dx,$	
$\int \frac{dx}{1+\cos x},$	$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx,$	$\int \frac{dx}{1-\sin x-\cos x}.$	

Nota: Este exercício foi tirado de G.B. Thomas e R.L. Finney, *Calculus and Analytic Geometry,* 5th ed., Addison-Wesley, 1983.

2. (Ex. 30 na p. 510 de [3]) Verifique que a função definida pela série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ é uma função elementar e determine-a, em termos explícitos.

VI Integração (8-12/4/2002)

1. (Ex. 1 na p. 629 de [3]) Considere a função $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1[, \\ 2 & \text{se } x = 1, \\ 3 & \text{se } x \in]1,2]. \end{cases}$$

Recorrendo directamente à definição, mostre que f é integrável à Riemann e que o seu integral vale 4.

2. (Ex. 2 na p. 629 de [3]) Prove que, se f é contínua em $[a,b]$, $f \geq 0$ e se existe um ponto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) > 0$, então $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

3. (Ex. 5 na p. 630 de [3]) Calcule

$$\int_2^3 \frac{x}{x^2-25}\,dx, \qquad \int_2^4 \frac{x^3}{x-1}\,dx, \qquad \int_{1/2}^e x\ln x\,dx.$$

4. (Ex. 6.39 de [6]) Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \int_{\varphi(x)}^{\varphi(x^3)} x^2 f(t)\,dt$. Mostre que h é diferenciável e calcule h'. Mostre que se φ e f são ímpares, então h é par.

5. (Ex. 6.49 de [6]) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável, negativa e com derivada negativa, e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \int_0^{x^2-4x+3} f(t)\,dt$.

a) Determine os intervalos de monotonia de g, os seus pontos de máximo e mínimo e as soluções da equação $g(x) = 0$. Determine a concavidade do gráfico de g.

b) Determine se g é majorada ou minorada.

$\surd$ 6. (Ex. 6.50 de [6]) Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e positiva e $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\Psi(x) := \int_x^{x^2} \varphi(t)\, dt$.

a) Estude o sinal de Ψ.

b) Justifique que Ψ é diferenciável e calcule Ψ'.

c) Prove que Ψ é estritamente decrescente no intervalo $]-\infty, 0[$.

d) Justifique que Ψ tem um mínimo absoluto, m, e que $|m| \leq \frac{1}{4} \max_{[0,1]} \varphi$.

$\surd$ 7. Calcule o comprimento do gráfico da função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2/2$.

VII Integração (15-19/4/2002)

$\surd$ 1. (Ex. 8 na p. 630 de [3]) Segundo a lei de Joule, a quantidade de calor Q, produzida num condutor de resistência constante, R, é dada pela fórmula $dQ = KRi^2\, dt$, onde i é a intensidade da corrente, t é o tempo e K uma constante. Supondo que i varia com o tempo segundo a lei $i = i_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$, em que T é o período da corrente, calcule o calor gerado num período.

$\surd$ 2. (Ex. 8 na p. 630 de [3]) Sendo $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_1^x \frac{e^{\frac{t^2+1}{t}}}{t}\, dt$ mostre que $F(1/x) = -F(x)$.

$\surd$ 3. (Ex. 6.45 de [6]) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e periódica de período T e F uma sua primitiva. Mostre que $x \mapsto F(x+T) - F(x)$ é constante. Mostre também que F também tem período T sse $\int_0^T f(x)\, dx = 0$.

$\surd$ 4. (Ex. 6.46 de [6]) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt & \text{se } x \neq 0, \\ f(0) & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Prove que F é contínua e diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Mostre que F pode não ser diferenciável na origem.

$\surd$ 5. Calcule a área da região $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x\}$ e da região $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x,\ y \leq 1 - x\}$.

$\surd$ 6. (Ex. 6.44 de [6]) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável. Para cada $h \neq 0$, considere $F_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $F_h(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(u)\, du$, de modo que $F_h(x)$ representa o valor médio de f no intervalo de extremos x e $x + h$.

a) Para cada $h \neq 0$, determine o domínio de diferenciabilidade de F_h e a sua derivada.

b) Seja $a \in \mathbb{R}$ fixo e φ, $\psi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, definidas por $\varphi(h) = F_h(a)$ e $\psi(h) = F_h'(a)$. Determine, caso existam, $\lim_{h\to 0} \varphi(h)$ e $\lim_{h\to 0} \psi(h)$.

VIII Estrutura Algébrica e Topológica de $\mathbb{R}^m$. Sucessões (22-26/4/2002)

√ 1. (Ex. 1 da Ficha 7 de [8]) Considere os conjuntos

$$
\begin{aligned}
A &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\},\\
B &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2> 1,\ 4x^2+y^2\le 4\},\\
C &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy\le 1\},\\
D &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>|y|\},\\
E &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<|x|+|y|\le 2\},\\
F &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \cos(x+y)\le 0\},\\
G &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} : \sin\left(1/\sqrt{x^2+y^2}\right)\ge 0\},\\
H &= \cup_{n\in\mathbb{N}_1}\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=1/n,\ \sqrt{x^2+z^2}\le 1/n\},\\
I &= \cup_{n\in\mathbb{N}}\{x\in\mathbb{R}^m : n+\log\|x-(n,\dots,n)\|\in\mathbb{R}^-\}.
\end{aligned}
$$

Esboce-os. Determine os seus interior, exterior e fronteira. Diga se são abertos, fechados, limitados, compactos, conexos ou convexos.

2. Seja $X\subset\mathbb{R}^m$ e $a\in\mathbb{R}^m$. Prove que o ponto a é aderente a X sse existe uma sucessão de termos em X convergente para a.

3. Prove que um conjunto é fechado sse para toda a sucessão convergente de termos no conjunto se tem que o limite da sucessão pertence ao conjunto.

4. Prove que o conjunto $X\subset\mathbb{R}^m$ é compacto sse qualquer sucessão de termos em X tem uma subsucessão convergente para um ponto de X.

IX Continuidade e Limite (29/4-3/5/2002)

√ 1. (Ex. 7.13 de [6]) Seja f uma função definida por $f(x,y)=x\ln(xy)$, no maior subconjunto de $\mathbb{R}^2$ em que o segundo membro faz sentido.

a) Esboce o domínio de f e indique se é aberto, fechado, limitado ou conexo.

b) A função f é contínua?

c) Seja S uma semirecta com origem em $(0,0)$ e contida no domínio de f. Mostre que existe e não depende de S, $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}} f(x,y)$.

d) Mostre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe. Sugestão: Considere o limite $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} f(x,y)$, onde $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\ne 0,\ y=e^{-1/x^2}\}$.

√ 2. (Ex. 7.18 de [6]) Estude quanto à continuidade a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definida por

$$
f(x,y)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x^2+y^2<2y,\\ |x| & \text{se } x^2+y^2=2y,\\ y^2 & \text{se } x^2+y^2>2y.\end{cases}
$$

√ 3. Calcule ou prove que não existem

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$,

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^4+y^2}$,

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{|x|^3+|y|^3}$,

d) $\lim_{(x,y)\to(a,-a)} \frac{x^2y}{x^3+y^3}$, onde $a \in \mathbb{R}$.

√ 4. (Ex. 7.19 de [6]) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(0,0) = 0$ e $f(x,y) = (y - 2x^2)/\sqrt{x^2+y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$.

a) Prove que f não é contínua na origem.

b) Prove que a restrição de f a $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x^2\}$ é contínua na origem.

c) Seja $k > 0$. Prove que a restrição de f a $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x/k\}$ não é contínua na origem.

5. ($\approx$ Ex. 8.5.4 de [2]) Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$. Mostre que $\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x,y)] = \lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0} f(x,y)]$ mas que f não tem limite na origem.

6. (Ex. 8.5.3 de [2]) Seja $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 0\} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = (x-y)/(x+y)$. Mostre que $\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x,y)] = 1$ e $\lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0} f(x,y)] = -1$

7. (Ex. 8.5.2 de [2]) Prove que se (i) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ e (ii) os limites $\lim_{x\to a} f(x,y)$ e $\lim_{y\to b} f(x,y)$ existem, então existem os limites $\lim_{x\to a}[\lim_{y\to b} f(x,y)]$ e $\lim_{y\to b}[\lim_{x\to a} f(x,y)]$, e são ambos L.

X Derivadas segundo vectores e diferenciabilidade (6-10/5/2002)

√ 1. (Ex. 8.9.1 de [2]) Um campo escalar f é definido em $\mathbb{R}^n$ por $f(x) = a \cdot x$, onde a é um vector constante. Calcule $f'(x;y)$, para x e y arbitrários.

√ 2. (Ex. 8.9.2.a de [2]) Resolva o exercício anterior para $f(x) = \|x\|^4$.

3. (Ex. 8.9.3 de [2]) Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear. Calcule a derivada $f'(x;y)$ para o campo escalar f definido em $\mathbb{R}^n$ por $f(x) = x \cdot T(x)$.

√ 4. ($\approx$ Ex. 8.9.18 de [2]) Seja $v(r,t) = t^{-n/2}e^{-r^2/(4t)}$. Determine o valor da constante n tal que v satisfaz

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r}\right).$$

√ 5. (Ex. 8.9.20 de [2]) Assuma que $f'(x; y) = 0$ para todo o x na bola n-dimensional $B(a)$ e para todo o vector y. Use o Teorema do Valor Médio para provar que f é constante em $B(a)$.

   Suponha agora que $f'(x; y) = 0$ para um vector y fixo e todo o x em $B(a)$. O que se pode concluir sobre f neste caso.

√ 6. (Ex. 8.14.3 de [2]) Encontre os pontos (x, y) e as direcções para as quais a derivada direccional de $f(x, y) = 3x^2 + y^2$ tem valor máximo, se (x, y) estiver restrito à circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

7. (Ex. 8.14.4 de [2]) Um campo escalar diferenciável tem, no ponto $(1, 2)$, derivadas direccionais 2 na direcção de $(1, 2)$ para $(2, 2)$ e -2 na direcção de $(1, 2)$ para $(1, 1)$. Determine o gradiente do campo em $(1, 2)$ e a derivada direccional na direcção de $(1, 2)$ para $(4, 6)$.

8. (Ex. 8.14.8 de [2]) Seja $\boldsymbol{r} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por $\boldsymbol{r}(x, y, z) = (x, y, z)$ e $r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definido por $r(x, y, z) = \|\boldsymbol{r}(x, y, z)\|$.

   a) Mostre que $\nabla r(x, y, z)$ é um vector unitário na direcção de $\boldsymbol{r}(x, y, z)$.
   b) Mostre que $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\boldsymbol{r}$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.
   c) A fórmula da alínea anterior é válida para os inteiros não positivos?
   d) Determine um campo escalar f tal que $\nabla f = \boldsymbol{r}$.

9. (Ex. 7.27 de [6]) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} & \text{se } x + y > 0, \\ x + y & \text{se } x + y \leq 0. \end{cases}$$

   a) Estude a existência de derivadas parciais de f na origem.
   b) Estude a diferenciabilidade de f na origem.
   c) Determine, caso existam, as derivadas segundo o vector $(1, 1)$ nos pontos $(1, 1)$ e $(1, -1)$.

10. (Ex. 8.17.6 de [2]) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$.

   a) Verifique que as derivadas $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são ambas nulas na origem.
   b) O gráfico de f admite um plano tangente na origem, ou seja, a função f é diferenciável na origem?

XI Diferenciabilidade (13-17/5/2002)

1. (Ex. 8.17.6 de [2]) Sejam f e g campos escalares diferenciáveis. Verifique as seguintes propriedades do gradiente:

   a) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$,
   b) $\nabla(cf) = c\nabla f$,
   c) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$,
   d) $\nabla(f/g) = (g\nabla f - f\nabla g)/g^2$, em pontos em que g não se anule.

√ 2. Prove pela definição que $(x, y) \mapsto \sin x \sin y$ é diferenciável na origem.

√ 3. Prove pela definição que $(x, y) \mapsto x \cos y$ é diferenciável em $(1, 0)$.

√ 4. (Ex. 7.26 de [6]) Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ x^2 + y^2 & \text{se } x \neq 0 \text{ e } y/x \in \mathbb{Q}, \\ -(x^2+y^2) & \text{se } x \neq 0 \text{ e } y/x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

a) Estude a diferenciabilidade de f na origem.

b) Estude a diferenciabilidade de f.

c) Seja $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Determine para que vectores $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ existe $f'((a, b); (v_1, v_2))$?

√ 5. (Ex. 7.35 de [6]) Considere a função f, definida por $f(x, y) = \int_y^{x^2 y} \frac{dt}{\ln t}$, no maior subconjunto, D, de $\mathbb{R}^2$ em que o segundo membro é finito.

a) Determine D e diga se é aberto, fechado, compacto, convexo ou conexo.

b) Justifique que f é diferenciável e determine a sua derivada total.

6. (Ex. 7.40 de [6]) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Mostre que f é contínua.

b) Determine se f é diferenciável na origem.

c) Determine o maior subconjunto de $\mathbb{R}^2$ onde existem e são iguais $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

XII Derivada da função composta (20-24/5/2002)

√ 1. (Ex. 8.22.14 de [2]) Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definidas por

$$f(x, y) = (e^{x+2y}, \sin(y + 2x)),$$

$$g(u, v, w) = (u + 2v^2 + 3w^3, 2v - u^2).$$

a) Calcule as matrizes Jacobianas $Df(x, y)$ e $Dg(u, v, w)$.

b) Seja $h = f \circ g$. Calcule $h(u, v, w)$.

c) Calcule a matriz Jacobiana $Dh(1, -1, 1)$.

2. (Ex. 8.22.15 de [2]) Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definidas por

$$f(x, y, z) = (x^2 + y + z, 2x + y + z^2),$$

$$g(u, v, w) = (uv^2 w^2, w^2 \sin v, u^2 e^v).$$

a) Calcule as matrizes Jacobianas $Df(x,y,z)$ e $Dg(u,v,w)$.

b) Seja $h = f \circ g$. Calcule $h(u,v,w)$.

c) Calcule a matriz Jacobiana $Dh(u,0,w)$.

3. (Ex. 8.22.2 de [2]) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $F(x,y) = f((x-y)/2, (x+y)/2)$. Determine as derivadas parciais $\partial F/\partial x$ e $\partial F/\partial y$ em termos das derivadas parciais de f.

4. (Ex. 8.22.8 de [2]) Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $(X,Y,Z) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e diferenciáveis e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $F(s,t) = f(X(s,t), Y(s,t), Z(s,t))$. Calcule as derivadas parciais de F em termos das derivadas parciais de f, X, Y e Z.

5. ($\approx$ Ex. 7.65 de [6]) Sejam f e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciáveis e $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$, onde $c \in \mathbb{R}$. Prove que
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

6. (Ex. 9.5.1 de [2]) Seja k uma constante positiva e f, $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definidas por $g(x,t) = x/(2\sqrt{kt})$ e
$$f(x,t) = \int_0^{g(x,t)} e^{-u^2}\, du.$$

a) Verifique que $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-g^2} \frac{\partial g}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial t} = e^{-g^2} \frac{\partial g}{\partial t}$.

b) Verifique que f satisfaz a equação do calor
$$\frac{\partial f}{\partial t} = k \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

7. (Ex. 9.5.2 de [2]) Considere um campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y)$ depende apenas da distância, r, de (x,y) à origem, digamos $f(x,y) = g(r)$, com $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, para uma certa função $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$.

a) Prove que
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{r} g'(r) + g''(r).$$
em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b) Assuma agora que f satisfaz a equação de Laplace,
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$
em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Prove que $f(x,y) = a \log(x^2 + y^2) + b$, para $(x,y) \neq (0,0)$, onde a e b são constantes.

XIII Extremos de Campos Escalares (27-31/6/2002)

√ 1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = xy(x + y - 1)$.

   a) Determine os extremos de f.

   b) Determine os extremos de $f|_{[0,1]\times[0,1]}$.

√ 2. (Ex. 7.100 de [6]) Classifique os pontos de estacionaridade de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x^2 - x^3 + y^4$

√ 3. (Ex. 9.13.16 de [2]) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$. Esboce no plano $\mathbb{R}^2$ as regiões onde f é positiva, nula e negativa. Verifique que a origem é um ponto de sela de f e que a restrição de f a rectas que passem na origem tem um mínimo em $(0, 0)$.

XIV Fórmula de Taylor e Extremos de Campos Escalares (3-7/6/2002)

√ 1. (Ex. 7.97 de [6]) Classifique os pontos de estacionaridade de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = (x - y)^3(3x - 3y - 4)$.

2. (Ex. 9.13.21 de [2]) Dados n números reais distintos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e outros n números reais $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (não necessariamente distintos), não existe, em geral, uma recta $y = ax + b$ que passe pelos pontos (x_i, y_i), ou seja, tal que $y_i = ax_i + b$, para cada $i = 1, \ldots, n$. No entanto, podemos determinar a recta $y = ax + b$ que minimiza o erro quadrático total

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^{n} [(ax_i + b) - y_i]^2.$$

   Sejam $\bar{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\bar{y} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$, $u_i := x_i - \bar{x}$, para cada $i = 1, 2\ldots, n$. Mostre que os valores de a e b que minimizam o erro quadrático total são

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i u_i}{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} \qquad \text{e} \qquad b = \bar{y} - a\bar{x}.$$

√ 3. Classifique os pontos de estacionaridade de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = (x - y)^2 - x^4 - y^4$.

√ 4. (Ex. 7.97 de [6]) Classifique os pontos de estacionaridade de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = xye^{x-y}$.

Referências

[1] Fichas para as aulas práticas por Jorge Almeida.

[2] T.M. Apostol, *Calculus.* Vol. II, Second edition. John Wiley & Sons, Inc., 1969.

[3] J. Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática,* Fundação Gulbenkian, 6ª ed., 1995.

[4] J. Campos Ferreira, *Introdução à Análise em* $\mathbb{R}^N$*,* AEIST, 1978.

[5] J. Campos Ferreira, *Notas de Análise em* $\mathbb{R}^N$*,* AEIST, 1987.

[6] Exercícios de Análise Matemática I e II, DMIST, 2001.

[7] Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral de Funções Definidas em R^n, D.A. Gomes, J.P. Matos e J.P. Santos, DMIST, 2000.

[8] Fichas para as aulas práticas por Luís Pessoa.