

Análise Matemática II, 1o. Semestre 2004-2005  
LEM, LEMat, LEGM  
Recuperação do 1o. Teste - 5 de Janeiro de 2005

Justifique as suas respostas

Nome: \_\_\_\_\_

No. e Curso: \_\_\_\_\_

1. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \text{ é racional} \\ -x^2, & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

a) Escreva as expressões das somas de Darboux superiores e inferiores de  $f$  relativamente a uma decomposição,  $d$ , do intervalo  $[a, b]$  com pontos  $a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$  ( $0 < \mathbf{a} < \mathbf{b}$ ).

b) Calcule os integrais superiores e inferiores de  $f$  relativos a  $[a, b]$ .

2.

a) Primitive a função

$$f(x) = \frac{1}{2 + \cos(x)}$$

b) Primitive a função

$$g(x) = \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)}$$

3.

a) Considere a elipse dada pela equação:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

onde  $a$  e  $b$  são números reais positivos e distintos. Calcule a área limitada por esta elipse.

b) Considere a superfície obtida por rotação da elipse da alínea anterior em torno do eixo dos  $XX$ . Calcule o volume do sólido limitado por essa superfície.

4.

a) Determine uma função  $f$ , contínua em  $]0, +\infty]$ , tal que, para todo o  $x \in ]0, +\infty]$ ,

$$\int_0^{x^2} f(t)dt = x^2(1+x)$$

b) Determine uma função  $f$ , contínua em  $]0, +\infty]$ , tal que, para todo o  $x \in ]0, +\infty]$ ,

$$\int_0^{f(x)} t^2 dt = x^2(1+x)$$