Análise Matemática II, 1o. Semestre 2004-2005
LEM, LEMat, LEGM
2o. Teste - 19 de Novembro de 2004 - RESOLUÇÃO

1. Diga qual a natureza dos seguintes integrais e calcule o valor representado por **um dos integrais convergentes**.

$$(a) \qquad \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

Tendo em atenção que o integral é impróprio, já que a função integranda **não** é limitada em nenhuma vizinhança de 1 nem de -1; e porque $P\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(t) + c$, tem-se:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$
$$= \lim_{a\mapsto -1^+} \int_{a}^{0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \lim_{b\mapsto 1^-} \int_{0}^{b} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$
$$= \lim_{a\mapsto -1^+} \Big[\arcsin(t)\Big]_a^0 + \lim_{b\mapsto 1^-} \Big[\arcsin(t)\Big]_0^b =$$
$$= \lim_{a\mapsto -1^+} \Big[\arcsin(0) - \arcsin(a)\Big]_a^0 + \lim_{b\mapsto 1^-} \Big[\arcsin(b) - \arcsin(0)\Big]_0^b =$$
$$= 0 - \arcsin(-1) + \arcsin(1) - 0 = -\frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Como a integranda é não negativa a convergência é absoluta.

$$(b) \qquad \int_{2}^{+\infty} \frac{x\sin(x)}{1+x^2} dx,$$

Consideremos a integranda em questão como $u(x)\cdot v'(x)$ onde

$$u(x) = \frac{x}{1+x^2} \qquad v(x) = -\cos(x)$$

Como

$$\big|v(x)\big| = \big|\cos(x)\big| \leq 1 \text{ para todo o } x$$

então v é limitada; como

$$\lim_{x\mapsto 0} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

e

$$\Big(\frac{x}{1+x^2}\Big)' = \frac{1\cdot(1+x^2) - x\cdot(2x)}{\big(1+x^2\big)^2} = \frac{1-x^2}{\big(1+x^2\big)^2}$$

então a integranda é decrescente para $x > 1$ (já que, aí, a sua derivada é negativa). Por um resultado das teóricas o integral em estudo converge.

Consideremos agora

$$\int_2^{+\infty} \left|\frac{x\sin(x)}{1+x^2}\right| dx$$

Sabemos das teóricas que

$$\int_2^{+\infty} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| dx$$

diverge. Como esta integranda e a integranda $\left|\frac{x\sin(x)}{1+x^2}\right|$ são ambas não negativas posso usar o critério do limite:

$$\frac{\left|\frac{x\sin(x)}{1+x^2}\right|}{\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|} = \frac{x^2}{1+x^2} \underset{x\mapsto\infty}{\longmapsto} 1$$

e então os integrais impróprios de 2 a ∞ que têm por integrandas as funções que acabámos de comparar, têm a mesma natureza. Então

$$\int_2^{+\infty} \left|\frac{x\sin(x)}{1+x^2}\right| dx$$

diverge e portanto

$$\int_2^{+\infty} \frac{x\sin(x)}{1+x^2} dx$$

converge simplesmente.

$$(b) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{(x^2+1)e^x}{x^{17}+3x^4+5} dx$$

Como a integranda é positiva podemos usar o critério do limite:

$$\frac{\frac{(x^2+1)e^x}{x^{17}+3x^4+5}}{x} = \frac{x^2+1}{x^{18}+3x^5+5x} e^x \underset{x\mapsto\infty}{\longmapsto} \infty$$

depois de umas quantas aplicações da regra de Cauchy. Então, a partir de um certo valor de x,

$$x \leq \frac{(x^2+1)e^x}{x^{17}+3x^4+5}$$

Como x é integranda de integral de 1 a ∞ divergente ($x = \frac{1}{x^{-1}}$, logo o α em questão é menor ou igual a 1, correspondendo portanto ao caso divergente) então

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x^2+1)e^x}{x^{17}+3x^4+5}dx$$

diverge. Como a integranda é sempre positiva então a convergência é absoluta.

2. Determine os desenvolvimentos em séries de potências de x das expressões abaixo, **indicando os domínios aonde são válidos**.

$$(a) \qquad a^x \qquad (a>0)$$

$$a^x = e^{\log(a^x)} = e^{x\log(a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big(\log(a)\big)^n}{n!} x^x \qquad \text{válido para todo o } x \text{ real.}$$

$$(b) \qquad \frac{12-5x}{6-5x-x^2}$$

$$\frac{12-5x}{6-5x-x^2} = \frac{5x-12}{x^2+5x-6} = \frac{5x-12}{(x+6)(x-1)} = \frac{A}{x+6} + \frac{B}{x-1} = \cdots$$

$$A = \left.\frac{5x-12}{x-1}\right|_{x=-6} = 6, \qquad B = \left.\frac{5x-12}{x+6}\right|_{x=1} = -1$$

$$\cdots = \frac{6}{x+6} + \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{6}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{6}\right)^n = \cdots$$

válidos para $|x|<1$ e $\left|\frac{x}{6}\right|<1$, respectivamente,

$$\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 + \left(-\frac{1}{6}\right)^n\right)x^n \qquad \text{válido para } |x|<1.$$

3. (a) Dê um exemplo de dois conjuntos disjuntos que **não** sejam separados (explicitando bem porque é que não são separados).

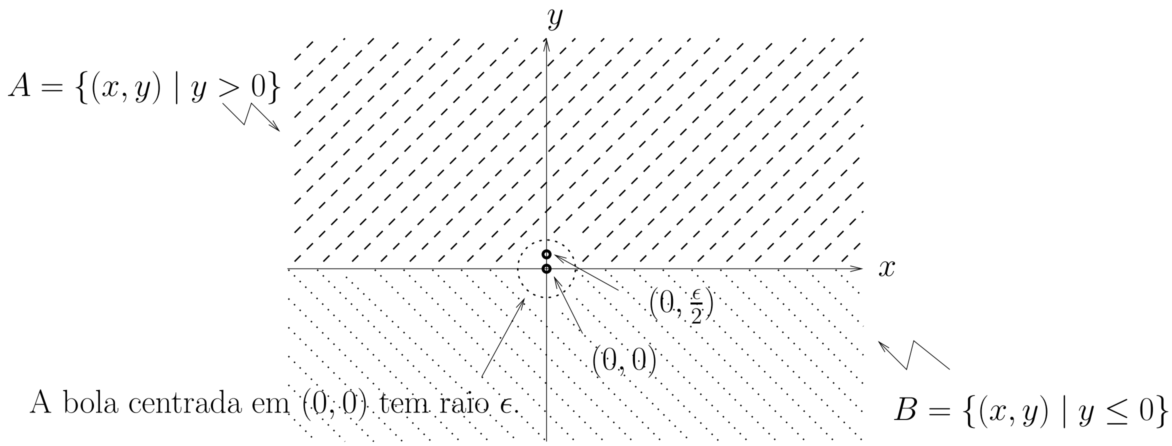

Figure 1: $(0, 0)$ é elemento de B, aderente a A (em $\mathbb{R}^2$)

Os conjuntos

$$A = \{(x, y) \mid y > 0\} \qquad \text{e} \qquad B = \{(x, y) \mid y \leq 0\}$$

são disjuntos satisfazendo

$$\bar{A} \cup B \neq \emptyset$$

já que $(0, 0)$ é aderente A e pertence a B como está ilustrado na figura.

(b) Considere o elemento de $\mathbb{R}^3$:

$$\big(\, r\cos(\theta)\sin(\varphi)\ ,\ r\sin(\theta)\sin(\varphi)\ ,\ r\cos(\varphi)\,\big)$$

(aonde r é um real positivo, $\theta \in [0, 2\pi[$ e $\varphi \in [0, \pi]$). Calcule a sua norma, **simplificando a expressão**.

$$\Big\|\big(\, r\cos(\theta)\sin(\varphi)\ ,\ r\sin(\theta)\sin(\varphi)\ ,\ r\cos(\varphi)\,\big)\Big\| =$$
$$= \sqrt{\big(r\cos(\theta)\sin(\varphi)\big)^2 + \big(r\sin(\theta)\sin(\varphi)\big)^2 + \big(r\cos(\varphi)\big)^2} =$$
$$= \sqrt{r^2\big(\cos^2(\theta)\sin^2(\varphi) + \sin^2(\theta)\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)\big)} =$$
$$= r\sqrt{\big(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\big)\cdot\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)} =$$
$$= r\sqrt{1\cdot\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)} = r\sqrt{1} = r$$

4. Considere, em $\mathbb{R}^3$, a sucessão (x_n) cujo termo geral é $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. **Usando a definição de convergência de sucessões**, mostre que (x_n) converge, indicando qual é o seu limite.

Por definição,

$$\lim_{n \mapsto \infty} x_n = l \Longleftrightarrow \text{para cada } \epsilon > 0 \text{ existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que}$$

$$\Big[n > N \Rightarrow \big|\big|x_n - l\big|\big| < \epsilon\Big]$$

Então, dado $\epsilon > 0$ consideremos aqui

$$||x_n|| = \left|\left|\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right|\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \sqrt{3\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{n}$$

Então, para escolhendo um número natural N tal que

$$N > \frac{\sqrt{3}}{\epsilon}$$

tem-se, para todo o $n > N$

$$||x_n|| = \left|\left|\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right|\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \sqrt{3\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{n} < \frac{\sqrt{3}}{N} < \epsilon$$

e como

$$x_n = x_n - \big(0, 0, 0\big)$$

tem-se que, para todo o $n > N$

$$\big|\big|x_n - \big(0, 0, 0\big)\big|\big| < \epsilon$$

ou seja,

$$\lim_{n \mapsto \infty} x_n = \big(0, 0, 0\big)$$