**Análise Matemtica II, 1o. Semestre 2004-2005**
**LEM, LEMat, LEGM**
**1o. Teste - 15 de Outubro de 2004 - RESOLUÇÃO**

**Justifique as suas respostas**

1. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ é racional} \\ -1, & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

a) Calcule as somas de Darboux superiores e inferiores de $f$ relativamente a uma decomposição, $d$, do intervalo $[a, b]$ com pontos $a = x_0$, $x_1$, ... , $x_{n-1}$, $x_n = b$ ($a < b$).

Já que, entre quaisquer dois números reais existe um número racional, então o supremo da função em qualquer subintervalo de $[a, b]$ (por exemplo, $[x_{k-1}, x_k]$) é $+1$ porque é o valor que a função assume nos racionais (e o único outro valor que a função assume é inferior a $+1$). Então, para qualquer $k$ tal que $1 \leq k \leq n$, tem-se

$$M_k = +1$$

Analogamente,

$$m_k = -1$$

Assim,

$$\begin{aligned} S_d(f) &= \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(+1)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = b - a \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} s_d(f) &= \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \\ &= -\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = -(b - a) \end{aligned}$$

b) $f$ é integrável em $[a, b]$?

O integral superior de $f$ em $[a, b]$ é, por definição, o ínfimo das somas superiores de Darboux de $f$ em $[a, b]$ sobre todas as decomposições do intervalo $[a, b]$, isto é,

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{S_d(f) \mid \ d \text{ é decomposição de [a, b] }\}$$

Como vimos na alínea anterior, qualquer que seja a decomposição de $[a, b]$, a soma de Darboux superior é sempre $b - a$. Então, **no nosso caso**:

$$\begin{aligned}\overline{\int_a^b} f(x)dx &= \inf\{S_d(f) \mid \ d \text{ é decomposição de [a, b] }\} \\ &= \inf\{b - a\} = b - a\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = -(b - a)$$

Como

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = b - a \neq -(b - a) = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

então $f$ não é integrável em $[a, b]$ (já que, por definição, uma função é integrável sobre um intervalo quando os integrais superiores e inferiores dessa função sobre esse intervalo são iguais).

2. Primitive a função

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x) + \cos(x)}$$

A função em questão é um caso particular de uma função racional "em $\sin(x)$ e $\cos(x)$" e, para se calcular a sua primitiva, convem escrever a função à custa de $\tan(\frac{x}{2})$, tendo em atenção que $\sin(x) = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$ e $\cos(x) = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$. Então,

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x)+\cos(x)} = \frac{1}{\frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} + \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}} = \frac{1+\tan^2(\frac{x}{2})}{2\tan(\frac{x}{2})+1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

e assim,

$$\begin{aligned}
&\int f(x)dx = \int \frac{dx}{\sin(x)+\cos(x)} = \int \frac{\big(1+\tan^2(\frac{x}{2})\big)dx}{2\tan(\frac{x}{2})+1-\tan^2(\frac{x}{2})} = \\
&= \left(t = \tan\Big(\frac{x}{2}\Big), \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}\right) \int \frac{1+t^2}{2t+1-t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \\
&= -2\int \frac{dt}{t^2-2t-1} = \cdots
\end{aligned}$$

Notando que as raizes de $t^2-2t-1=0$ são $\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}$, tem-se

$$\frac{1}{t^2-2t-1} = \frac{A}{t-\frac{2+\sqrt{8}}{2}} + \frac{B}{t-\frac{2-\sqrt{8}}{2}}$$

donde

$$A = \left.\frac{1}{t-\frac{2-\sqrt{8}}{2}}\right|_{t=\frac{2+\sqrt{8}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

e

$$B = \left.\frac{1}{t-\frac{2+\sqrt{8}}{2}}\right|_{t=\frac{2-\sqrt{8}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{8}}$$

e retomando a primitivação:

$$\begin{aligned}
&\cdots = -2\int \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{8}}}{t-\frac{2+\sqrt{8}}{2}} + \frac{-\frac{1}{\sqrt{8}}}{t-\frac{2-\sqrt{8}}{2}}\right)dt = \\
&= -\frac{2}{\sqrt{8}}\left(\log\left|t-\frac{2+\sqrt{8}}{2}\right| - \log\left|t-\frac{2-\sqrt{8}}{2}\right|\right) + c = \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\log\left|\tan\Big(\frac{x}{2}\Big)-1-\sqrt{2}\right| - \log\left|\tan\Big(\frac{x}{2}\Big)-1+\sqrt{2}\right|\right) + c
\end{aligned}$$

3. Calcule a área de um círculo de raio $r$ ($r > 0$).

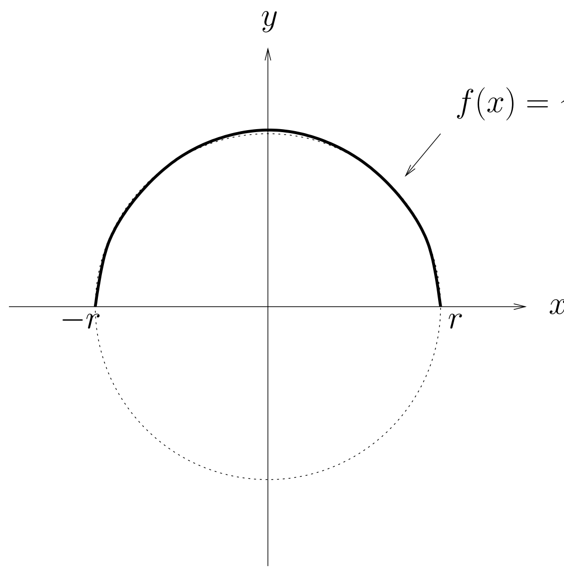


Figure 1: ... calculando a área do círculo de raio $r$

A área do círculo de raio $r$ é dada por

$$A = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx = \cdots$$

Fazendo integração por substituição com

$$x = r\sin(t), \quad t = \arcsin\left(\frac{x}{r}\right), \quad \frac{dx}{dt} = r\cos(t)$$
$$x = -r \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}, \qquad x = r \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

tem-se

$$\cdots = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2(t)^2} r\cos(t)dt = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos(t) \cdot r\cos(t)dt =$$
$$= 2r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt = \cdots$$

Notando que

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos^2(t) - \Big(1 - \cos^2(t)\Big) = 2\cos^2(t) - 1$$

vem

$$\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$$

donde,

$$\cdots = 2r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2} dt = 2r^2 \left[ \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{2 \cdot 2} \right]_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 2r^2 \left( \frac{\frac{\pi}{2}}{2} - \frac{-\frac{\pi}{2}}{2} + \frac{\sin(2 \cdot \frac{\pi}{2})}{4} - \frac{\sin(2 \cdot \frac{-\pi}{2})}{4} \right) = 2r^2 \Big( \frac{\pi}{2} + 0 \Big) =$$

$$= \pi r^2$$

4. Determine uma função $f$, contínua em $\mathbb{R}$, tal que

$$\int_0^x f(t)dt = -\frac{1}{2} + x^2 + x\sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

Supondo $f$ contínua em $\mathbb{R}$,

$$\left( \int_0^x f(t)dt \right)' = f(x)$$

pelo Teorema Fundamental da Análise. Então,

$$f(x) = \left( \int_0^x f(t)dt \right)' = \left( -\frac{1}{2} + x^2 + x\sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x) \right)' =$$

$$= 0 + 2x + 1 \cdot \sin(2x) + x \cdot \cos(2x) \cdot 2 - \frac{1}{2}\Big( -\sin(2x) \Big) \cdot 2 =$$

$$= 2x + 2x\cos(2x) = 2x\Big(1+\cos(2x)\Big)$$