

1. Seja A um subconjunto não vazio de \mathbb{R}^m e $b \in \mathbb{R}^m$. Chama-se distância do ponto b ao conjunto A - notação: $d(b, A)$ - ao ínfimo do conjunto formado pelas distâncias de b a cada um dos pontos de A :

$$d(b, A) := \inf\{\|x - b\| \mid x \in A\}$$

Tendo em conta esta definição:

- Justifique que, se $b \in A$, $d(b, A) = 0$ e mostre por meio de um exemplo que pode ter-se $d(b, A) = 0$ com $b \notin A$
- Prove que se A é fechado e se $d(b, A) = 0$ então $b \in A$
- Justifique que, se A é não vazio, limitado e fechado, então existe um ponto $a \in A$ tal que $d(b, A) = \|a - b\|$. (Note que “norma de...” é uma função contínua)
- Prove que o resultado da alínea anterior é ainda verdadeiro, supondo apenas que A é fechado e não vazio.

2. Seja f a função dada por

$$f(x, y) = x \log(xy)$$

- Indique o domínio D de f , interprete-o geometricamente e determine o seu interior, o seu exterior e a sua fronteira. Indique justificando se D é aberto, fechado, limitado, conexo.
- A função f é contínua em todo o seu domínio? Justifique.
- Mostre que, sendo S uma semirecta com origem no ponto $(0, 0)$ e contida no domínio de f , o limite de f em $(0, 0)$ relativo ao conjunto S ,

$$\lim_{\substack{(x,y) \mapsto (0,0) \\ (x,y) \in S}} f(x, y)$$

tem o mesmo valor para toda a semirecta S nas condições indicadas.

- Mostre que não existe $\lim_{(x,y) \mapsto (0,0)} f(x, y)$. Calcule o limite quando $(x, y) \mapsto (0, 0)$ ao longo da linha de equação $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

3. Mostre que não existe

$$\lim_{(x,y) \mapsto (0,0)} \frac{xy}{x^3 + y^2}$$

4. Considere a função dada pela expressão

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{xy - 1}}$$

definida em $D = \{(x, y) \mid xy > 1\}$.

- Indique, justificando os pontos em que f é contínua.
- Existirá algum ponto fronteiro ao domínio D ao qual f possa prolongar-se por continuidade?

c) Indique, justificando, o contradomínio de D .

5. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(0, 0) = 0$$
$$f(x, y) = \frac{y - 2x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

a) Prove que esta função não é contínua em $(0, 0)$.

b) Considere a restrição desta função ao conjunto $D = \{(x, y) \mid |y| \leq x^2\}$. Prove que esta restrição de f é contínua em $(0, 0)$.

c) Verifique que a conclusão da alínea anterior não seria válida se, em vez da restrição a D , considerássemos a restrição a

$$D_k = \{(x, y) \mid |y| \leq \frac{x}{k}\} \quad k \in \mathbb{R}^+.$$