

1. Seja  $A$  um subconjunto não vazio de  $\mathbb{R}^m$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ . Chama-se distância do ponto  $b$  ao conjunto  $A$  - notação:  $d(b, A)$  - ao ínfimo do conjunto formado pelas distâncias de  $b$  a cada um dos pontos de  $A$ :

$$d(b, A) := \inf\{\|x - b\| \mid x \in A\}$$

Tendo em conta esta definição:

- a) Justifique que, se  $b \in A$ ,  $d(b, A) = 0$  e mostre por meio de um exemplo que pode ter-se  $d(b, A) = 0$  com  $b \notin A$
- b) Prove que se  $A$  é fechado e se  $d(b, A) = 0$  então  $b \in A$
- c) Justifique que, se  $A$  é não vazio, limitado e fechado, então existe um ponto  $a \in A$  tal que  $d(b, A) = \|a - b\|$ . (Note que “norma de...” é uma função contínua)
- d) Prove que o resultado da alínea anterior é ainda verdadeiro, supondo apenas que  $A$  é fechado e não vazio.

2. Seja  $f$  a função dada por

$$f(x, y) = x \log(xy)$$

- a) Indique o domínio  $D$  de  $f$ , interprete-o geometricamente e determine o seu interior, o seu exterior e a sua fronteira. Indique justificando se  $D$  é aberto, fechado, limitado, conexo.
- b) A função  $f$  é contínua em todo o seu domínio? Justifique.
- c) Mostre que, sendo  $S$  uma semirecta com origem no ponto  $(0, 0)$  e contida no domínio de  $f$ , o limite de  $f$  em  $(0, 0)$  relativo ao conjunto  $S$ ,

$$\lim_{\substack{(x,y) \mapsto (0,0) \\ (x,y) \in S}} f(x, y)$$

tem o mesmo valor para toda a semirecta  $S$  nas condições indicadas.

- d) Mostre que não existe  $\lim_{(x,y) \mapsto (0,0)} f(x, y)$ . Calcule o limite quando  $(x, y) \mapsto (0, 0)$  ao longo da linha de equação  $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ .

3. Mostre que não existe

$$\lim_{(x,y) \mapsto (0,0)} \frac{xy}{x^3 + y^2}$$

4. Considere a função dada pela expressão

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{xy - 1}}$$

definida em  $D = \{(x, y) \mid xy > 1\}$ .

- a) Indique, justificando os pontos em que  $f$  é contínua.
- b) Existirá algum ponto fronteiro ao domínio  $D$  ao qual  $f$  possa prolongar-se por continuidade?

c) Indique, justificando, o contradomínio de  $D$ .

5. Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  definida por

$$f(0,0) = 0$$
$$f(x,y) = \frac{y - 2x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

a) Prove que esta função não é contínua em  $(0,0)$ .

b) Considere a restrição desta função ao conjunto  $D = \{(x,y) \mid |y| \leq x^2\}$ . Prove que esta restrição de  $f$  é contínua em  $(0,0)$ .

c) Verifique que a conclusão da alínea anterior não seria válida se, em vez da restrição a  $D$ , considerássemos a restrição a

$$D_k = \{(x,y) \mid |y| \leq \frac{x}{k}\} \quad k \in \mathbb{R}^+.$$