

Integrais de Linha:

1. Seja $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Calcule os integrais de linha deste \mathbf{F} ao longo de

- (a) $\mathbf{c}(t) = (t, t, t), \quad 0 \leq t \leq 1$
- (b) $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, 0), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
- (c) $\mathbf{c}(t) = (t^2, 3t, 2t^3), \quad -1 \leq t \leq 2$

2. Calcule os seguintes integrais de linha.

- (a) $\int_{\mathbf{c}} xdy - ydx, \quad \mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
- (b) $\int_{\mathbf{c}} xdy + ydx, \quad \mathbf{c}(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t), \quad 0 \leq t \leq 2$
- (c) $\int_{\mathbf{c}} yzdx + xzdy + xydz, \quad$ onde \mathbf{c} consiste nos segmentos de recta ligando $(1, 0, 0)$
a $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$
- (d) $\int_{\mathbf{c}} x^2dx - xydy + dz, \quad$ onde \mathbf{c} é a parábola $z = x^2, y = 0$ de $(-1, 0, 1)$ a $(1, 0, 1)$

3. Seja \mathbf{c} um caminho suave.

(a) Suponha que \mathbf{F} é perpendicular a $\mathbf{c}'(t)$ em cada ponto $\mathbf{c}(t)$. Mostre que

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

(b) Suponha que \mathbf{F} é paralelo a $\mathbf{c}'(t)$ em cada ponto $\mathbf{c}(t)$. Mostre que

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}} \|\mathbf{F}\| ds$$

4. Considere o campo da força gravitacional (com $G=M=m=1$) dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \quad \text{para } (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

Calcule o trabalho realizado pela força gravitacional quando uma partícula se desloca de (x_1, y_1, z_1) para (x_2, y_2, z_2) .

Parametrizações de superfícies:

5. Encontre uma equação do plano tangente à superfície no ponto indicado:

- (a) $x = 2u \quad y = u^2 + v \quad z = v^2$ no ponto
- (b) $x = u^2 - v^2 \quad y = u + v \quad z = u^2 + 4v$ no ponto $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2)$
- (c) $x = u^2 \quad y = u \sin e^v \quad z = \frac{1}{3}u \cos e^v$ no ponto $(13, -2, 1)$

6. Encontre uma expressão para um vector unitário normal à superfície

$$x = \cos v \sin u \quad y = \sin v \sin u \quad z = \cos u$$

na imagem do ponto (u, v) onde $u \in [0, \pi]$ e $v \in [0, 2\pi]$. Identifique esta superfície.