$7^{\underline{a}}$ Série de problemas de Geometria Algébrica

ENTREGAR EM 02/05/03

1. O *fecho projectivo* de um conjunto $X \subset \mathbb{A}^n$ é o conjunto algébrico $\overline{u_0(X)} \subset \mathbb{P}^n$. Mostre que as subvariedades afins de $\mathbb{A}^n$ $V(x)$ e $V(x - y^4 - z^4)$ são isomorfas, mas os seus fechos projectivos não são isomorfos.

2. Recorde que a *homogeneização* de $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$ é o polinómio homogéneo

$$F^*(X_0, \ldots, X_n) := X_0^{\deg F} F\left(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0}\right) \in k[X_0, \ldots, X_n].$$

   A *homogeneização* de um ideal $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ é o ideal $I^* \subset k[X_0, \ldots, X_n]$ gerado por $\{F^* \mid F \in I\}$.

   (a) Mostre que I^* é radical se I for radical.
   (b) Mostre que $\mathbb{V}(I^*)$ é o fecho projectivo de $V(I)$.
   (c) Sejam $f_1 = x^2 - y$ e $f_2 = x^3 - z$. Mostre que (f_1, f_2) é radical mas (f_1^*, f_2^*) não é radical.
   Sugestão: Note que $V(f_1, f_2) = \{(t, t^2, t^3) \in k^3 \mid t \in k\}$.

3. Uma cónica C em $\mathbb{P}^2$ é um subconjunto algébrico de $\mathbb{P}^2$ definido por um polinómio homogéneo, $Q(X_0, X_1, X_2) \in k[X_0, X_1, X_2]$ de grau 2, ou seja,

$$C = \left\{(X_0 : X_1 : X_2) \in \mathbb{P}^2 \mid Q(X_0 : X_1 : X_2) = 0\right\}.$$

   (a) Seja k um corpo algebricamente fechado de característica $\neq 2$. Mostre que qualquer cónica é necessariamente isomorfa a uma das seguintes cónicas

$$\begin{aligned} C_1 &:= \left\{(X_0 : X_1 : X_2) \in \mathbb{P}^2 \mid X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0\right\}, \\ C_2 &:= \left\{(X_0 : X_1 : X_2) \in \mathbb{P}^2 \mid X_0^2 + X_1^2 = 0\right\}, \\ C_3 &:= \left\{(X_0 : X_1 : X_2) \in \mathbb{P}^2 \mid X_0^2 = 0\right\}. \end{aligned}$$

   Sugestão: Use o facto de que qualquer forma quadrática sobre k pode ser diagonalizada.

   (b) Mostre que toda a cónica irredutível em $\mathbb{P}^2$ é isomorfa a $\mathbb{P}^1$.

4. O mergulho de *Veronese* $\nu_{1,n}$ é o morfismo $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$ definido por

$$\nu_{1,n}(X_0 : X_1) := (X_0^n : X_0^{n-1} X_1 : \ldots : X_1^n).$$

(a) Mostre que $\nu_{1,n}$ é um mergulho;

(b) Mostre que o homomorfismo $\nu_{1,n}^* \colon k_h[\nu_{1,n}(\mathbb{P}^1)] \to k_h[\mathbb{P}^1]$ não é um isomorfismo;

(c) Mostre que as álgebras $k_h[\nu_{1,2}(\mathbb{P}^1)]$ e $k_h[\mathbb{P}^1]$ não são isomorfas. (Portanto, dada uma variedade projectiva $X \subset \mathbb{P}^n$, a álgebra $k_h[X]$ depende do mergulho de X em $\mathbb{P}^n$.)