$6^{\underline{a}}$ Série de problemas de Geometria Algébrica

ENTREGAR EM 11/04/2003

1. Seja p um ponto de uma variedade algébrica X. Mostre que $\mathcal{O}_p$ é um domínio integral *sse* p pertence a uma única componente irredutível de X.

2. Seja X uma variedade algébrica (não necessariamente irredutível). Mostre que X é não-singular em $p \in X$ *sse* $\mathcal{O}_p$ é um anel regular.

3. Determine os pontos singulares da curva algébrica definida em $\mathbb{P}^2$ pela equação

$$X_0^2 X_2^2 = (X_1^2 + X_0^2)(X_1^2 + 3X_0^2).$$

   Calcule a dimensão do espaço tangente nos pontos singulares.

4. Recorde que, dado $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ de grau d e $\mathbf{p} \in k^n$, podemos escrever f de forma única como uma soma $f = \sum_{i=0}^{d} f_i$, onde f_i é um polinómio homogéneo de grau i em $x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n$. O termo dominante de f em torno de $\mathbf{p}$ é o polinómio $f_* = f_i$ tal que $i = \min\{j \mid f_j \neq 0\}$. Se $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ é um ideal, denotamos por I_* o ideal gerado por $\{f_* \mid f \in I\}$. Dado um conjunto algébrico $X \subset k^n$, o *cone tangente* de X em $\mathbf{p} \in X$ é o conjunto algébrico $C_{\mathbf{p}}(X) = V(\mathcal{I}(X)_*)$. Note que $C_{\mathbf{p}}X \subset T_{\mathbf{p}}X$.

   (a) Mostre que, se $\mathcal{I}(X) = (f)$ (e portanto X é uma hipersuperfície), então $C_{\mathbf{p}}(X) = V(f_*)$[1];

   (b) Seja $X = V(y^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2$. Calcule $T_{\mathbf{0}}X$ e $C_{\mathbf{0}}X$;

   (c) Seja $Y = V(y^2 - x^2(x+1)) \subset \mathbb{A}^2$. Calcule $T_{\mathbf{0}}Y$ e $C_{\mathbf{0}}Y$.

[1] No entanto, $I = (F_1, \ldots, F_s) \not\Rightarrow I_* = (F_{1*}, \ldots, F_{s*})$.