Exercícios de Geometria Algébrica

1 Propriedades elementares

1. Seja $Z \subset \mathbb{A}^n$ uma subvariedade fechada tal que $\dim Z \leq n-2$. Seja $U = \mathbb{A}^n - Z$. Mostre que a restrição $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n) \to \mathcal{O}(U)$ é um isomorfismo.

2. Mostre que a superfície definida pela equação $xy - zw = 0$ em $\mathbb{P}^3$ é isomorfa a $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

3. Seja $f(x,y,z) = xy - z^2$ e seja $X = V(f) \subset \mathbb{A}^3$. Note que a variedade $L \subset \mathbb{A}^3$, definida pelas equações $x = z = 0$, está contida em X. Mostre que

(a) $\dim L = \dim X - 1$;

(b) existe $h \in \mathcal{O}_X(X)$ tal que

$$L = V_X(h) := \{z \in X \mid h(z) = 0\};$$

(c) o ideal

$$\mathcal{I}_X(L) := \{g \in \mathcal{O}_X(X) \mid g \equiv 0 \text{ em } L\}$$

não é principal.

2 Feixes

1. Dê um exemplo de um pré-feixe $\mathcal{F}$ num espaço topológico X que não verifique a 1ª condição de feixe:

(i) se $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de $U \subset X$ e $s \in \mathcal{F}(U)$, então $s = 0$ sse $s|_{U_i} = 0$, $\forall i \in I$.

2. Dê um exemplo de um pré-feixe $\mathcal{F}$ num espaço topológico X que não verifique a 2ª condição de feixe:

(ii) se $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de $U \subset X$ e $\{s_i\}_{i \in I}$ é uma colecção de secções $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, $i \in I$, tal que

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$$

então existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$, $\forall i \in I$.

3. Um fibrado vectorial algébrico de característica d é um morfismo de variedades algébricas $\pi : E \twoheadrightarrow X$, tal cada fibra $\pi^{-1}(x_0)$ tem uma estrutura de espaço vectorial-k, e tal que existe uma cobertura aberta $X = \cup_i U_i$ e isomorfismos $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{A}^d$ cuja restrições às fibras são lineares e que fazem comutar o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_i) \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[d, "\pi"'] & U_i \times \mathbb{A}^d \arrow[d, "pr_1"] \\
U_i \arrow[r, equal] & U_i
\end{tikzcd}$$

No caso $d = 1$, diz-se que E é um *fibrado de linhas*. Dado um aberto $U \subset X$, os elementos do conjunto

$$\mathcal{O}(E)(U) := \left\{ s \colon U \to \pi^{-1}(U) \mid s \text{ é um morfismo tal que } \pi \circ s = \mathrm{id}_U \right\}$$

dizem-se secções de E sobre U.

Mostre que se $\pi\colon E \to X$ é um fibrado vectorial algébrico de característica d então a correspondência $U \mapsto \mathcal{O}(E)(U)$ define um módulo-$\mathcal{O}_X$ livre de característica d. (Pode mostrar-se que o functor $E \mapsto \mathcal{O}(E)$ é uma equivalência entre a categoria dos fibrados vectoriais e a categoria dos módulos-$\mathcal{O}_X$ livres.)

4. Seja $\mathbb{P}^0 = \{(0 : \cdots : 0 : 1)\} \subset \mathbb{P}^n$. Considere a aplicação $\pi : \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^0 \to \mathbb{P}^{n-1}$ definida por $\pi(x_0 : \cdots : x_n) = (x_0 : \cdots : x_{n-1})$.

(a) Mostre que π é um morfismo cujas fibras $\pi^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{P}^{n-1}$, são espaços lineares sobre k, de dimensão 1.

(b) Mostre que $\pi : \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^0 \to \mathbb{P}^{n-1}$ é um fibrado de linhas algébrico L.

Sugestão: Mostre que L é trivial em cada aberto da forma $U_i := \{x \in \mathbb{P}^{n-1} \mid x_i \neq 0\}$.

(c) Seja $\mathcal{O}(L)$ o feixe das secções de L. Recorde que existe um isomorfismo de grupos $c\colon \operatorname{Pic}(\mathbb{P}^{n-1}) \to \mathbb{Z}$. Calcule o inteiro m tal que $c([\mathcal{O}(L)]) = m$ (onde $[\mathcal{O}(L)]$ denota a classe de isomorfismo de $\mathcal{O}(L)$).

Sugestão: Mostre que $(x_0 : \cdots : x_{n-1}) \mapsto (x_0 : \cdots : x_{n-1} : x_0)$ define uma secção de L. Use esta secção para estabelecer um isomorfismo $\mathcal{O}(L) \cong \mathcal{L}(D)$, para algum $D \in \operatorname{Div}(\mathbb{P}^{n-1})$.

5. Seja $\varphi\colon \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ um morfismo de feixes de conjuntos sobre um espaço topológico X. Mostre que φ é um isomorfismo se e só se $\forall_{x\in X}\ \varphi_x$ é um isomorfismo.

6. Seja $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$ uma sucessão exacta de feixes abelianos num espaço topológico X. Mostre que a sucessão de grupos abelianos

$$0 \to \Gamma(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\Gamma(f)} \Gamma(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{\Gamma(g)} \Gamma(X,\mathcal{H})$$

é exacta.

3 Propriedades locais

1. Seja X uma variedade e seja $x \in X$. Dizemos que X é irredutível em x se x pertence a uma única componente de X. Mostre que X é irredutível em x sse o anel local $\mathcal{O}_{X,x}$ é um domínio integral.

2. Seja k um corpo algébricamente fechado de característica zero. Considere a variedade-k $X = V(x^2 + y^2 + z^3) \subset \mathbb{A}^3$.

(a) Determine os pontos singulares de X;

(b) Seja Y o fecho de X em $\mathbb{P}^3$. Determine os pontos singulares de Y.

3. Considere as variedades

$$\begin{aligned} X &= V(xy) \subset \mathbb{A}^2 \\ Y &= \big(\mathbb{A}^1 \times \{0\} \times \{0\}\big) \cup \big(\{0\} \times \mathbb{A}^1 \times \{0\}\big) \cup \big(\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{A}^1\big) \subset \mathbb{A}^3 \\ Z &= V(xy(x-y)) \subset \mathbb{A}^2 \end{aligned}$$

e os pontos $p = (0,0) \in X \cap Z$ e $q = (0,0,0) \in Y$.

(a) Mostre que $\mathcal{O}_{X,p} \cong \{(f_1, f_2) \in (\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,0})^2 \mid f_1(0) = f_2(0)\}$;

(b) Determine $\mathcal{O}_{Y,q}$;

(c) Mostre que

$$\mathcal{O}_{Z,p} \cong \{(f_1, f_2, f_3) \in (\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,0})^3 \mid f_1(0) = f_2(0) = f_3(0),\ f_3 + f_3(0) - (f_1 + f_2) \in \mathfrak{n}_0^2\},$$

onde $\mathfrak{n}_0 \subset \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,0}$ é o ideal maximal;

(d) Mostre que $Y \ncong Z$.

4. O *blowup* de $\mathbb{A}^n$ na origem é o subconjunto Z de $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ definido por

$$Z = \{(x, \ell) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \mid x \in \ell\}.$$

Sejam $p : Z \to \mathbb{A}^n$ e $q : Z \to \mathbb{P}^{n-1}$ as projecções. O conjunto $D := p^{-1}(0)$ é habitualmente designado por *divisor excepcional*.

Mostre que

(a) Z é uma subvariedade fechada de $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$;

(b) a restrição de p a $Z \setminus D$ é um isomorfismo (em particular, p é *bi-racional*[1]);

(c) $q : Z \to \mathbb{P}^{n-1}$ é um fibrado de linhas algébrico ξ. O fibrado ξ é designado por fibrado tautológico. O nome decorre do facto de a fibra sobre um ponto $\ell \in \mathbb{P}^{n-1}$ ser a linha ℓ;

(d) o divisor excepcional D é localmente definido por uma só equação em Z.
Sugestão: determine a relação entre D e o fibrado ξ.

5. Recorde que o *blow-up* de $\mathbb{A}^2$ na origem é a subvariedade $\widetilde{\mathbb{A}}^2$ de $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ definida pelas equações $xu = ty$, onde x, y são coordenadas para $\mathbb{A}^2$ e t, u são coordenadas homogéneas para $\mathbb{P}^1$. Seja $p : \widetilde{\mathbb{A}}^2 \to \mathbb{A}^2$ a projecção $p(x, y; t : u) = (x, y)$. Temos $E := p^{-1}(0) \simeq \mathbb{P}^1$, e $p : p^{-1}(\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}) \to \mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ é um isomorfismo. A subvariedade $E \subset \widetilde{\mathbb{A}}^2$ é habitualmente designada por *divisor excepcional*.

Dada uma curva $C \subset \mathbb{A}^2$ tal que $0 \in C$, a *transformada estrita* de C em 0 é a curva $\widetilde{C}$ que se obtém tomando o fecho de $p^{-1}(C \setminus \{0\})$ em $\widetilde{\mathbb{A}}^2$. A curva $\widetilde{C}$ é bi-racional a C pois $p : \widetilde{C} \setminus \widetilde{C} \cap E \to C \setminus \{0\}$ é um isomorfismo. No *blow-up*, $\widetilde{\mathbb{A}}^2$, o ponto 0 é substituído por um espaço projectivo $\mathbb{P}^1$ cujos pontos correspondem aos declives das rectas que passam por 0, como ilustra o problema seguinte.

Considere as curvas C_1 e C_2 definidas em $\mathbb{A}^2$ pelas equações $y^2 = x^2(x + 1)$ e $y^2 = x^3$, respectivamente. Sejam $p_1 = p_{|\widetilde{C}_1}$ e $p_2 = p_{|\widetilde{C}_2}$.

(a) Mostre que as curvas C_1 e C_2 são singulares na origem; esboce as curvas definidas pelas equações de C_1 e C_2 em $\mathbb{R}^2$ (*i.e.*, os pontos reais de C_1 e C_2).

(b) Seja $U \subset \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ o aberto afim definido por $t \neq 0$. Calcule as equações de $\widetilde{C}_1 \cap U$. Verifique que $p_1^{-1}(0)$ é um conjunto com dois elementos que correspondem aos declives das tangentes a C_1 em 0. Mostre que a curva $\widetilde{C}_1$ é não-singular.

(c) Mostre que $\widetilde{C}_2$ é isomorfa a $\mathbb{A}^1$ e que $p_2 : \widetilde{C}_2 \to C_2$ é uma aplicação bijectiva e bicontínua (na topologia de Zariski) que não é um isomorfismo (neste caso a singularidade é uma cúspide e portanto os declives são iguais).

6. Seja X uma variedade irredutível não singular e seja $\varphi\colon X \to X$ um automorfismo.

(a) Mostre que φ induz um isomorfismo $\varphi_*\colon \operatorname{Div}(X) \to \operatorname{Div}(X)$ tal que $\varphi_*(D) = \varphi(D)$, $\forall D$ divisor primo;

[1] Um morfismo $f : X \to Y$ diz-se *bi-racional* se existem abertos $U \subset X$ e $V \subset Y$, densos, tais que f induz um isomorfismo de U em V.

(b) Mostre que $\varphi_*(\mathrm{div}(\varphi^*(g))) = \mathrm{div}(g)$, $\forall g \in k(X)^\times$;

(c) Mostre que φ_* induz um isomorfismo $\mathrm{PDiv}(X) \to \mathrm{PDiv}(X)$;

(d) Seja $X = \mathbb{P}^n$ e $H_i = \mathbb{V}(x_i)$. Mostre que $\varphi_*(H_i)$ é um hiperplano, ou seja, $\varphi_*(H_i) = \mathbb{V}(L_i)$, para algum funcional linear $L_i \colon k^{n+1} \to k$;

(e) Mostre que existem funcionais lineares $L_i \colon k^{n+1} \to k$, $i = 0, \ldots, n$, tais que

$$\varphi(x_0 : \ldots : x_n) = (L_0(x_0, \ldots, x_n) : \ldots : L_n(x_0, \ldots, x_n)).$$

Conclua que $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n) = \mathrm{PGL}_{n+1}(k) = \mathrm{GL}_{n+1}(k)/k^\times$.

4 Dimensão das fibras de um morfismo

1. Mostre que o espaço linear $S^d(x_0, \ldots, x_n)$ dos polinómios homogéneos de grau d, nas variáveis $x_0, \ldots, x_n$, tem dimensão $\binom{n+d}{d}$. Conclua que o espaço projectivo $\mathbb{P}(S^d(x_0, \ldots, x_n))$ tem dimensão $\nu_{n,d} = \binom{n+d}{d} - 1$.

2. Sejam $F_0(z_0, \ldots, z_n), \ldots, F_n(z_0, \ldots, z_n)$ polinómios homogéneos de graus $d_0, \ldots, d_n$, respectivamente. Considere o sistema de $n+1$ equações em $n+1$ variáveis $F_0(z) = \cdots = F_n(z) = 0$. Seja Γ o subconjunto de $\prod_{i=0}^n \mathbb{P}^{\nu_{n,d_i}} \times \mathbb{P}^n$ definido por

$$\Gamma = \{(F_0, \ldots, F_n, z) \,|\, F_0(z) = \cdots = F_n(z) = 0\},$$

e sejam $p : \Gamma \to \prod_{i=0}^n \mathbb{P}^{\nu_{n,d_i}}$, $q : \Gamma \to \mathbb{P}^n$ as projecções.

(a) Mostre que $\dim \Gamma = \dim p(\Gamma) = \sum_i \nu_{n,d_i} - 1$.

(b) Use o resultado da alínea anterior para mostrar que existe um polinómio $R = R(F_0, \ldots, F_n)$, nos coeficientes dos polinómios $F_0, \ldots, F_n$, tal que $R(F_0, \ldots, F_n) = 0$ é uma condição necessária e suficiente para que o sistema de equações $F_0(z) = \cdots = F_n(z) = 0$ tenha uma solução não trivial.

(c) Identifique o polinómio R no caso em que os polinómios $F_0, \ldots, F_n$ são lineares. Justifique.

Sugestão: Aplique o teorema da dimensão das fibras de um morfismo. Pode usar, sem demonstrar, o facto de que toda a hipersuperfície num produto $\prod_{j=0}^k \mathbb{P}^{m_j}$ é definida por uma equação, que é homogénea em cada um dos $k+1$ conjuntos de variáveis.