$6^{\underline{a}}$ Série de problemas de Geometria Algébrica

ENTREGAR 4 PROBLEMAS EM 23/5/2001

1. (Feixe $\mathcal{H}om$) Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ feixes abelianos em X. Note que, para cada aberto $U \subset X$, o conjunto $\hom(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$, de morfismos de feixes abelianos em U, tem uma estrutura natural de grupo abeliano. Mostre que a correspondência $U \mapsto \hom(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ define um feixe abeliano em X. Este feixe é designado por feixe dos homomorfismos locais de $\mathcal{F}$ em $\mathcal{G}$ e é denotado por $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

2. Mostre que, para cada aberto U de um espaço topológico X, o functor $\Gamma(U, -)$ é um functor exacto à esquerda, da categoria dos feixes abelianos em X na categoria grupos abelianos. Ou seja, se
$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$$
é uma sucessão exacta de feixes abelianos em X, então
$$0 \to \Gamma(U, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{G}) \to \Gamma(U, \mathcal{H})$$
é uma sucessão exacta de grupos abelianos.

3. Mostre que uma sucessão de feixes abelianos em X
$$\cdots \mathcal{F}_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{F}_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} \cdots$$
é exacta se e só a correspondente sucessão ao nível das fibras
$$\cdots \mathcal{F}_{i-1,x} \xrightarrow{\varphi_{i-1,x}} \mathcal{F}_{i,x} \xrightarrow{\varphi_{i,x}} \mathcal{F}_{i+1,x} \xrightarrow{\varphi_{i+1,x}} \cdots$$
é exacta, para todo $x \in X$.

4. (Produtos exteriores e determinantes) Seja $(X, \mathcal{O}_X)$ um espaço com funções e seja $\mathcal{M}$ um $\mathcal{O}_X$-módulo. Define-se a álgebra exterior de $\mathcal{M}$ como o feixe associado ao pré-feixe $U \mapsto \bigwedge \mathcal{M}(U)$. Este feixe é denotado por $\bigwedge \mathcal{M}$. Note que $\bigwedge \mathcal{M}$ é um feixe de $\mathcal{O}_X$-álgebras graduadas (*i.e.* para cada U, o conjunto $\bigwedge \mathcal{M}(U)$ é uma $\mathcal{O}_X(U)$-álgebra graduada e esta estrutura é compatível com as aplicações de restrição). O subfeixe dos elementos de grau d de $\bigwedge \mathcal{M}$ é denotado por $\bigwedge^d \mathcal{M}$. Suponhamos agora que $\mathcal{G}$ é um $\mathcal{O}_X$-módulo localmente livre de característica finita r. Então define-se $\det \mathcal{G} = \bigwedge^r \mathcal{G}$. Mostre que
   (a) para cada d, $\bigwedge^d \mathcal{G}$ é um $\mathcal{O}_X$-módulo localmente livre de característica $\binom{r}{d}$ (em particular $\det \mathcal{G}$ é um $\mathcal{O}_X$-módulo invertível);
   (b) se $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ é uma sucessão exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos localmente livres, então
   $$\det \mathcal{G} \simeq \det \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \det \mathcal{H},$$
   onde $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H}$ é o produto tensorial $\mathcal{O}_X$-módulos, que é o feixe associado ao pré-feixe $U \mapsto \mathcal{G}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{H}(U)$.

5. Seja $X = \mathrm{Spec}(A)$. Mostre que, para todo $x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x} \simeq A_{\mathfrak{m}_x}$, onde $\mathfrak{m}_x \subset A$ é o ideal maximal das funções regulares em X que se anulam em x.

6. Seja A um anel e M um A-módulo. Mostre que

   (a) se $S \subset A$ um conjunto multiplicativo, então $M_S \simeq M \otimes_A A_S$;

   (b) se $f \in A$, então $M_{(f)} \simeq \operatorname{colim}_{i \in \mathbb{N}} M_i$, onde $M_i = M$ e o colimite é tomado em relação às aplicações $F_{i+1}^i : M_i \to M_{i+1}$ definidas por $F_{i+1}^i(m) = f \cdot m$.

   Nota: recorde que $M_{(f)}$ denota a localização de M no conjunto multiplicativo $S = \{f^i \mid i \in \mathbb{N}\}$.