$5^{\underline{a}}$ Série de problemas de Geometria Algébrica

ENTREGAR EM 9/5/2001

1. Sejam X e Y variedades algébricas. Mostre que

   (a) $X \times Y$ é irredutível se X e Y o forem;

   (b) $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$.

   Sugestão para (b): reduza ao caso em que X e Y são espaços afins.

2. Sejam $p, q : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ as projecções, e seja $X \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ um fechado irredutível e não vazio. Mostre que $p(X) = q(X) = \mathbb{P}^1$, excepto se X é de uma das seguintes formas

   (i) $X = \{(x_0, y_0)\}$;

   (ii) $X = \{x_0\} \times \mathbb{P}^1$;

   (iii) $\mathbb{P}^1 \times \{y_0\}$

3. O *blowup* de $\mathbb{A}^n$ na origem é o subconjunto Z de $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ definido por

$$Z = \{(x, \ell) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \,|\, x \in \ell\}.$$

   Sejam $p : Z \to \mathbb{A}^n$ e $q : Z \to \mathbb{P}^{n-1}$ as projecções. O conjunto $E := p^{-1}(0)$ é habitualmente designado por *divisor excepcional*.

   Mostre que

   (a) Z é uma subvariedade fechada de $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$;

   (b) a restrição de p a $Z \setminus E$ é um isomorfismo (em particular, p é *bi-racional*[1]);

   (c) $q : Z \to \mathbb{P}^{n-1}$ é um fibrado de linhas algébrico ξ. Ou seja, $\mathbb{P}^{n-1}$ tem uma cobertura por abertos U_i para os quais existe um isomorfismo $\psi_i : q^{-1}(U_i) \xrightarrow{\simeq} U_i \times \mathbb{A}^1$ que faz comutar o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} q^{-1}(U_i) \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[d, "q"'] & U_i \times \mathbb{A}^1 \arrow[d, "pr_1"] \\ U_i \arrow[r, equal] & U_i \end{tikzcd}$$

   e tal que ψ_i é linear nas fibras $q^{-1}(\ell)$, $\ell \in \mathbb{P}^{n-1}$.

   O fibrado ξ é designado por fibrado tautológico. O nome decorre do facto de a fibra sobre um ponto $\ell \in \mathbb{P}^{n-1}$ ser a linha ℓ;

   (d) o divisor excepcional E é localmente definido por uma só equação em Z.

   Sugestão: determine a relação entre E e o fibrado ξ.

[1] Um morfismo $f : X \to Y$ diz-se *bi-racional* se existem abertos $U \subset X$ e $V \subset Y$, densos, tais que f induz um isomorfismo de U em V.