$3^{\underline{a}}$ Série de problemas de Geometria Algébrica

ENTREGAR 8 PROBLEMAS EM 11/4/2001

1. Mostre que a definição de $\mathbb{P}^1$ como o quociente de $(\mathbb{A}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$ coincide com a definição dada no início do curso.

2. Mostre que $\mathbb{A}^n \setminus \{0\}$ não é afim se $n > 1$ e é afim se $n = 1$.

3. (O mergulho de Veronese) Considere a função $\nu_2 : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ definida em coordenadas homogéneas por
$$\nu_2(z_0 : z_1) = (z_0^2 : z_0 z_1 : z_1^2).$$
   (a) Mostre que ν_2 está bem definida e é injectiva.
   (b) Mostre que ν_2 é um morfismo.
   (c) Mostre que imagem de ν_2 é dada pelos zeros de um polinómio homogéneo, $Q(y_0, y_1, y_2)$ de grau 2, ou seja,
$$\nu_2(\mathbb{P}^1) = \{(y_0 : y_1 : y_2) \in \mathbb{P}^2 \,|\, Q(y_0, y_1, y_2) = 0\}.$$
   Nota: Em particular, isto prova que $\nu_2(\mathbb{P}^1)$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{P}^1$, como veremos na próxima aula. Portanto, $\nu_2(\mathbb{P}^1)$ é uma subvariedade projectiva de $\mathbb{P}^2$.
   (d) Mostre que ν_2 é um isomorfismo na sua imagem.

4. Seja X uma variedade quase afim e $f : \mathbb{P}^n \to X$ um morfismo. Mostre que a imagem de f é necessariamente um ponto.

5. Seja A um elemento de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ (*i.e.*, A é uma matriz $(n+1) \times (n+1)$ complexa invertível). Considere a função $F : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ definida por
$$F(z_0 : \cdots : z_n) = A \cdot (z_0 : \cdots : z_n) := \pi(A \cdot (z_0, \ldots, z_n)),$$
onde $\pi : \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$ é a projecção natural.
   (a) Mostre que F está bem definida e é bijectiva.
   (b) Mostre que F é um morfismo.
   (c) Mostre que F é um isomorfismo.

6. Uma cónica C é um subconjunto de $\mathbb{P}^2$ definido pelos zeros de um polinómio homogéneo, $Q(z_0, z_1, z_2)$, de grau 2, ou seja,
$$C = \{(z_0 : z_1 : z_3) \in \mathbb{P}^2 \,|\, Q(z_0, z_1, z_3) = 0\}.$$
Use o resultado do exercício 5 para mostrar que qualquer cónica é necessariamente isomorfa a uma das seguintes cónicas
$$\begin{aligned} C_1 :=& \{(z_0 : z_1 : z_3) \in \mathbb{P}^2 \,|\, z_0^2 + z_1^2 + z_3^2 = 0\}, \\ C_2 :=& \{(z_0 : z_1 : z_3) \in \mathbb{P}^2 \,|\, z_0^2 + z_1^2 = 0\}, \\ C_3 :=& \{(z_0 : z_1 : z_3) \in \mathbb{P}^2 \,|\, z_0^2 = 0\}. \end{aligned}$$

Sugestão: Recorde que qualquer forma quadrática sobre $\mathbb{C}$ pode ser diagonalizada.

7. Um espaço topológico X diz-se irredutível se $X = X_1 \cup X_2$, com X_1, X_2 subespaços fechados, implica $X = X_1$ ou $X = X_2$. Usando o resultado dos exercícios 3 e 6, mostre que uma cónica irredutível é necessariamente isomorfa a $\mathbb{P}^1$.

8. Seja f um polinómio de grau $d > 0$ nas variáveis $z_1, \ldots, z_n$.

   (a) Mostre que existe $\lambda \in \mathbb{C}^n$ tal que $f(\lambda) \neq 0$, sem usar o Nullstellensatz.
   Sugestão: comece por provar o resultado no caso $n = 1$ e utilize indução em n.

   (b) Mostre que o resultado da alínea anterior é uma consequência do Nullstellensatz.

9. Mostre que um anel A é noetheriano se e só se todo o submódulo de um A-módulo, finitamente gerado, é também finitamente gerado.

10. Seja Y a subvariedade de $\mathbb{A}^3$ definida pelos polinómios $x^2 - yz$ e $xz - x$. Mostre que Y tem três componentes. Identifique-as e calcule os seus ideais primos.

11. Seja $X \subset \mathbb{A}^2$ a curva algébrica definida pela equação $y^2 = x^3$. Mostre que toda a função regular em X pode escrever-se de forma única como $P(x)+Q(x)y$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinómios.

12. Seja X a variedade do exercício anterior. Mostre que a função $\varphi : \mathbb{A}^1 \to X$ definida por $\varphi(t) = (t^2, t^3)$ é um morfismo bijectivo, com inversa contínua, mas não é um isomorfismo.