Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

1º Exame e 2º Teste – 11 de Janeiro de 2002 – 17 horas

Resolução

1. Integrando primeiro em ordem a y e depois em ordem a x temos

$$\begin{aligned}\iint_D f &= \int_0^1 \int_{x^2}^{2x} yx\ dydx = \\ &= \int_0^1 \left(2x^3 - \frac{x^5}{2}\right)\ dx = \frac{5}{12}\ .\end{aligned}$$

2. (a) A expressão para o volume de V é dada por

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{(2-z)^2-y^2}} dx\right) dy + \int_1^{2-z} \left(\int_0^{\sqrt{(2-z)^2-y^2}} dx\right) dy\right) dz$$

(b) A resposta é, utilizando coordenadas cilíndricas,

$$\begin{aligned}\int_V f(x,y,z)dxdydz &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_1^2 \left(\int_0^{2-\rho} \rho^3 \cos(\theta)\mathrm{sen}\,(\theta)^2 dz\right) \rho d\rho\right) d\theta \\ &= \left(\int_0^{\pi/2} \cos(\theta)\mathrm{sen}\,(\theta)^2 d\theta\right) \left(\int_1^2 \rho^4(2-\rho)d\rho\right) \\ &= \left[\frac{\mathrm{sen}\,(\theta)^3}{3}\right]_0^{\pi/2} \left[\frac{2\rho^5}{5} - \left(\frac{\rho^6}{6}\right)\right]_1^2 = \frac{19}{30}.\end{aligned}$$

3. (a) Temos que

$$\partial_1 f_2 = \partial_2 f_1 = (y^2-x^2)/(x^2+y^2)^4;\ \partial_2 f_3 = \partial_3 f_2 = 0;\ \partial_1 f_3 = \partial_3 f_1 = 0.$$

Portanto f é fechado.

(b) O trabalho de f ao longo de uma circunferência horizontal que dê a volta ao eixo dos z não é zero pelo que f não é um gradiente. Basta tomar $\alpha(\theta) = (\cos(\theta), \mathrm{sen}\,(\theta), 0)$ para obter $\oint f d\alpha = 2\pi \neq 0$.

(c) Separemos $f = g + h$ onde $g(x,y,z) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0)$ e $h(x,y,z) = (x,y,z^2)$.
O arco de circunferência, chamemos-lhe γ, em questão está contido no plano vertical $x = 0$. Ora, o campo g é perpendicular a este plano porque $g(0,y,z) = (-1/y, 0, 0)$. Logo o trabalho de g é nulo ao longo do arco de circunferência pretendido.
Por outro lado, h é claramente um gradiente em $\mathbb{R}^3$ com $h(x,y,z) = \nabla\phi(x,y,z)$ e $\phi(x,y,z) = (x^2+y^2)/2 + z^3/3$.
Os pontos inicial e final do arco de circunferência percorrido no sentido crescente dos z são respectivamente $(0,\sqrt{3},-1)$ e $(0,\sqrt{3},1)$. Logo temos o trabalho,

$$\int_\gamma f = \int_\gamma h = \phi(0,\sqrt{3},1) - \phi(0,\sqrt{3},-1) = \frac{2}{3}.$$

4. A área do rectângulo é dada pela função $f(x, y) = 4xy$. Devemos por isso determinar o máximo de f sujeito à restrição $x^2 + 4y^2 = 1$. Como f é contínua e $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 = 1\}$ é compacto, o problema tem solução. Aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange, e atendendo a que $x = y = 0$ não é solução do sistema, vem

$$\begin{cases} 4y + 2\lambda x &= 0 \\ 4x + 8\lambda y &= 0 \\ x^2 + 4y^2 &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2\lambda & 4 \\ 4 & 8\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1.$$

Resolvendo as primeiras equações para $\lambda = \pm 1$ obtemos $x = \pm 2y$. Substituindo na última equação vem

$$(x, y) \in \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \right\}.$$

Como $|f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2\sqrt{2}})| = 1$ concluímos que o maior rectângulo inscrito na elipse tem área 1.

5. (a) Seja $G(x, y, z) = y + x^2 + z^2 - 4$. Temos

$$S = \{(x, y, z) \in S : (x, y, z) = 0, \ 0 < y < 3\},$$

e $DG(1, 2, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Logo o espaço normal no ponto $p = (1, 2, 1)$ é

$$(T_pS)^\perp = \{(2\lambda, \lambda, 2\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

(b) (i) Sejam P_1 e P_3 as superfícies planas definidas por

$$\begin{aligned} P_0 =& \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 < 4\,,\ y = 0\} \\ P_1 =& \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 < 1\,,\ y = 3\} \end{aligned}$$

e seja $\mathbf{n}$ a normal unitária exterior ao sólido V limitado por $S \cup P_0 \cup P_1$. Pelo teorema da divergência, temos

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} + \iint_{P_0} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} + \iint_{P_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} = 0,$$

pois $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. Ora, temos $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$, em P_0, e $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 3$, em P_1, logo

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -\iint_{P_1} 3 = -3\,\mathrm{vol}_2(P_1) = -3\pi.$$

(ii) Consideremos a parametrização $g(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, 4 - \rho^2, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$, $(\rho, \theta) \in]1, 2[\times]0, 2\pi[$, para S. Temos

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & -2\rho & \mathrm{sen}\,\theta \\ -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = (-2\rho^2\cos\theta, -\rho, -2\rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta).$$

Como esta normal aponta para o interior do sólido V, vem

$$
\begin{aligned}
&\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \\
&= \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta, 4-\rho^2, 2\rho\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta\right)\cdot\left(2\rho^2\cos\theta, \rho, 2\rho^2\operatorname{sen}\theta\right) d\theta \right) d\rho \\
&= \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(4\rho - \rho^3 - 2\rho^3\operatorname{sen}^2\theta\right) d\theta \right) d\rho \\
&= 2\pi \left[2\rho^2 - \frac{\rho^4}{2} \right]_1^2 \\
&= -3\pi.
\end{aligned}
$$

(iii) Pretendemos agora aplicar o teorema de Stokes para calcular o fluxo do campo vectorial $\mathbf{F}$. Recorde-se que $\nabla\cdot\mathbf{F}=0$. Como $\mathbf{F}$ está definido em $\mathbb{R}^3$, que é um conjunto em estrela, concluímos que $\mathbf{F}$ é um campo rotacional. Se $\mathbf{A}$ é um potencial vector para $\mathbf{F}$, i.e., se $\mathbf{F}=\nabla\times\mathbf{A}$, então devemos ter

$$
\begin{cases}
\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = z^2 \\
\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = y \\
\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = 2x - z
\end{cases}
$$

Como é sabido, o facto de o potencial vector estar definido a menos de um gradiente permite-nos sempre supor que uma das componentes deste se anula. Escolhemos por exemplo $A_1 = 0$. Então obtemos

$$
\begin{cases}
\frac{\partial A_3}{\partial x} = -y \\
\frac{\partial A_2}{\partial x} = 2x - z \\
\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = z^2
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
A_3 = -xy + f(y,z) \\
A_2 = x^2 - xz + g(y,z) \\
\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} = z^2
\end{cases}
$$

Portanto podemos por exemplo escolher $g=0$ e $f=yz^2$. Um potencial vector para F é então

$$\mathbf{A} = (0, x^2 - xz, yz^2 - xy).$$

Aplicando o teorema de Stokes, vem

$$\iint_S F\cdot n = \iint_S \nabla\times\mathbf{A}\cdot n = \int_{\partial S} \mathbf{A}\cdot d\alpha,$$

onde α é um caminho que percorre ∂S no sentido compatível com a normal exterior n, e $\nabla\times\mathbf{A}$ representa o rotacional de $\mathbf{A}$. Ora,

$$
\begin{aligned}
\partial S &= C_1 \cup C_0 \\
&= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+z^2=4,\ y=0\right\} \cup \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+z^2=1,\ y=3\right\},
\end{aligned}
$$

pelo que α percorre C_0 no sentido positivo e C_1 no sentido negativo, em relação a um observador no ponto $(0,4,0)$. Assim, temos

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} A\cdot d\alpha =& \int_0^{2\pi}(0,4\cos^2 t-4\cos t\,\mathrm{sen}\,t,0)\cdot(-2\,\mathrm{sen}\,t,0,-2\cos t)dt\\ &+\int_0^{2\pi}(0,\cos^2 t-\mathrm{sen}\,t\cos t,3\,\mathrm{sen}^2\,t-3\cos t)\cdot(-\mathrm{sen}\,t,0,\cos t)dt\\ =&-\int_0^{2\pi}3\cos^2 t dt\\ =&-3\pi.\end{aligned}$$

6. As funções

$$f_n(x,y,z)=\begin{cases}\frac{\mathrm{sen}\left(x^2+y^2/4+z^2\right)}{[x^2+y^2/4]^2} & \text{para } (x,y,z): x^2+\frac{y^2}{4}\le n^2\\ 0 & \text{para } (x,y,z): x^2+\frac{y^2}{4}> n^2\end{cases} \tag{1}$$

são, para todo o n, contínuas num compacto e zero fora do compacto pelo que são integráveis em D. Por outro lado a sucessão $\{f_n\}$ converge para f em toda a parte em D. A sucessão não é no entanto monótona qtp em D pelo que tentaremos aplicar o teorema de convergência dominada de Lebesgue. Para $h(x,y,z)=\frac{1}{[x^2+y^2/4]^2}$ temos $|f_k|\le h, \forall k\in\mathbb{N}$, em D. Para mostrar a integrabilidade de f falta mostrar que h é integrável. Consideremos a sucessão $\{h_k\}$ de funções integráveis construída de forma análoga a (1)

$$h_n(x,y,z)=\begin{cases}\frac{1}{[x^2+y^2/4]^2} & \text{para } (x,y,z): x^2+\frac{y^2}{4}\le n^2\\ 0 & \text{para } (x,y,z): x^2+\frac{y^2}{4}> n^2\end{cases}$$

Esta sucessão é monótona crescente e converge em toda a parte em D para h. Para mostrar, pelo teorema de convergência monótona de Levi, que h é integrável falta mostrar que a sucessão numérica $\{\iiint_D h_k\}$ é majorada. Fazendo a transformação de coordenadas

$$g\;:\;\begin{cases}x&=&\rho\cos(\theta)\\ y&=&2\rho\,\mathrm{sen}(\theta)\\ z&=&z\end{cases}$$

com $\det(Dg)=2\rho$ temos

$$\iiint_D h_k=\int_{-1}^1\int_0^{2\pi}\int_1^k\frac{1}{\rho^4}2\rho\;d\rho d\theta dz=8\pi\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)<4\pi\;,\;\forall k\in\mathbb{N}\;.$$

Assim h é integrável e portanto f também é integrável em D. Por outro lado

$$\iiint_D h=\lim_{k\to\infty}\iiint_D h_k=\lim_{k\to\infty}4\pi\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=4\pi$$

e, uma vez que $|f|\le h$ em D, temos $|\iiint_D f|\le\iiint_D|f|\le\iiint_D h=4\pi$. Logo, o integral $|\iiint_D f|$ é majorado por 4π.