6^{a} Ficha de Exercícios de AMIII

Resolução Sumária

1. Considere a superfície

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

   (a) Escreva uma parametrização, $\mathbf{g}\colon V \subset \mathbb{R}^2 \to T$, cuja imagem cubra T excepto duas circunferências.

   (b) Determine uma forma-2, μ, que induza uma orientação em T correspondente à normal exterior.

   (c) Determine se $\mathbf{g}$ é compatível com μ.

Resolução:

   (a) A imagem parametrização

$$\mathbf{g}_1(\theta, \alpha) = ((2 + \cos\alpha)\cos\theta, (2 + \cos\alpha)\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\alpha), \qquad (\theta, \alpha) \in V_1 =]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$$

   é o conjunto

$$T \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \big((x - 2)^2 + z^2 = 1 \wedge y = 0\big) \vee \big(x^2 + y^2 = 9 \wedge z = 0\big)\}$$

   e portanto satisfaz a condição do enunciado.
   Considerando a mesma expressão que define $\mathbf{g}_1$ nos domínios $V_2 =]0, 2\pi[\times] - \pi, \pi[$, $V_3 =] - \pi, \pi[\times] - \pi, \pi[$ e $V_4 =] - \pi, \pi[\times]0, 2\pi[$, obtemos parametrizações $\mathbf{g}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, cujas imagens cobrem T.

   (b) Consideremos a forma-2

$$\mu = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\right) dy \wedge dz + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\right) dz \wedge dx + z dx \wedge dy,$$

   Temos,

$$\mathbf{g}_i^*(\theta, \alpha) = (2 + \cos\alpha) d\theta \wedge d\alpha, \qquad i = 1, \dots, 4.$$

   Uma vez que $(2 + \cos\alpha) \neq 0, \forall\alpha \in \mathbb{R}$ e $T = \bigcup_{i=1}^4 \mathbf{g}_i(V_i)$, concluímos que μ induz uma orientação em T.

   (c) Como $(2 + \cos\alpha) > 0, \forall\alpha \in]0, 2\pi[$, concluímos que $\mathbf{g}_i$, $i = 1, \dots, 4$, é compatível com μ.

2. Usando o Teorema de Stokes, calcule $\int_M \omega$, com uma orientação à sua escolha, em cada um dos seguintes casos

(a) $\omega = xdx + ydy$, $M = \{(e^{-t}\cos t, e^{-t}\operatorname{sen} t) \mid t \in [0,1]\}$;

(b) $\omega = dx \wedge dy$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$

(c) $\omega = xdy \wedge dz - x^2ydx \wedge dy$, $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$;

(d) $\omega = ydy \wedge dz + dz \wedge dx$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x > 0\}$.

Resolução:

(a) Seja $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ e consideremos M com a orientação compatível com a parametrização $\mathbf{g}(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\operatorname{sen} t)$, $t \in [0,1]$. Temos $df = \omega$, logo, munindo ∂M com a orientação induzida por M e aplicando o Teorema de Stokes, vem

$$\int_M \omega = f(\mathbf{g}(1)) - f(\mathbf{g}(0)) = \frac{e^{-2}}{2} - \frac{1}{2}.$$

(b) Consideremos M com a orientação canónica em $\mathbb{R}^2$ (induzida por $dV_2 = dx \wedge dy$). Temos $\omega = d(xdy)$, logo, pelo Teorema de Stokes,

$$\int_M \omega = \int_{\partial M} xdy = \int_0^{2\pi} 4\cos^2\theta\, d\theta - \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = 3\pi.$$

(c) Seja $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$ com a orientação canónica (induzida por $dV_3 = dx \wedge dy \wedge dz$). Temos $M = \partial V$. Munindo M com a orientação induzida por V e aplicando o Teorema de Stokes, vem

$$\int_M \omega = \int_{\partial V} \omega = \int_V d\omega = \int_V dV_3 = \mathrm{Vol}_3(V) = \frac{4\pi abc}{3}.$$

(d) Consideremos M com a orientação compatível com a normal unitária exterior à bola $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^1 \leq 1\}$ e seja $\eta = -yzdy + zdx$. Temos $d\eta = \omega$, logo, munindo ∂M com a orientação induzida por M e aplicando o Teorema de Stokes, vem

$$\int_M \omega = \int_{\partial M} \eta = -\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta = 0.$$

onde usámos a seguinte parametrização para ∂M: $\mathbf{g}(\theta) = (0, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, $\theta \in]0, 2\pi[$.

3. Considere o campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (z^2, y, 2x - z)$ e a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 4 - x^2 - z^2\,,\ 0 < y < 3\}.$$

Calcule o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S, no sentido da normal unitária exterior ao sólido limitado por S e pelos planos $y = 0$ e $y = 3$,

(a) usando o Teorema da Divergência;

(b) pela definição de fluxo;

(c) usando o Teorema de Stokes.

Resolução:

(a) Sejam P_1 e P_3 as superfícies planas definidas por

$$\begin{aligned} P_0 =& \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2 < 4\,,\ y=0\} \\ P_1 =& \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2 < 1\,,\ y=3\} \end{aligned}$$

e seja $\mathbf{n}$ a normal unitária exterior ao sólido V limitado por $S \cup P_0 \cup P_1$. Pelo teorema da divergência, temos

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dV_2 + \iint_{P_0} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dV_2 + \iint_{P_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dV_2 = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV_3 = 0,$$

pois $\nabla\cdot\mathbf{F} = 0$. Ora, temos $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = 0$, em P_0, e $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = 3$, em P_1, logo

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dV_2 = -\iint_{P_1} 3\,dV_2 = -3\,\mathrm{vol}_2(P_1) = -3\pi.$$

(b) Consideremos a parametrização $\mathbf{g}(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, 4-\rho^2, \rho\operatorname{sen}\theta)$, $(\rho,\theta) \in]1,2[\times]0,2\pi[$, para S. Temos

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & -2\rho & \operatorname{sen}\theta \\ -\rho\operatorname{sen}\theta & 0 & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = (-2\rho^2\cos\theta, -\rho, -2\rho^2\operatorname{sen}\theta).$$

Como esta normal aponta para o interior do sólido V, vem

$$\begin{aligned} &\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dV_2 = \\ &= \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\rho^2\operatorname{sen}^2\theta, 4-\rho^2, 2\rho\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta\right) \cdot \left(2\rho^2\cos\theta, \rho, 2\rho^2\operatorname{sen}\theta\right) d\theta \right) d\rho \\ &= \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(4\rho - \rho^3 - 2\rho^3\operatorname{sen}^2\theta\right) d\theta \right) d\rho \\ &= 2\pi \left[2\rho^2 - \frac{\rho^4}{2} \right]_1^2 \\ &= -3\pi. \end{aligned}$$

Em alternativa, temos

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dV_2 &= \int_S \Omega_{\mathbf{F}} = -\iint_{]1,2[\times]0,2\pi[} \mathbf{g}^*\Omega_{\mathbf{F}} \\ &= \iint_{]1,2[\times]0,2\pi[} \left(4\rho - \rho^3 - 2\rho^3\operatorname{sen}^2\theta + 2\rho^4\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + 4\rho^3\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right) d\rho\wedge d\theta \\ &= \iint_{]1,2[\times]0,2\pi[} \left(4\rho - \rho^3 - 2\rho^3\operatorname{sen}^2\theta + 2\rho^4\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + 4\rho^3\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right) d\rho\,d\theta \\ &= \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(4\rho - \rho^3 - 2\rho^3\operatorname{sen}^2\theta\right) d\theta \right) d\rho \\ &= -3\pi. \end{aligned}$$

(c) Pretendemos agora aplicar o teorema de Stokes para calcular o fluxo do campo vectorial $\mathbf{F}$. Recorde-se que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. Como $\mathbf{F}$ está definido em $\mathbb{R}^3$, que é um conjunto em estrela, concluímos que $\mathbf{F}$ é um campo rotacional. Se $\mathbf{A}$ é um potencial vector para $\mathbf{F}$, ou seja, se $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$, então devemos ter

$$\begin{aligned} d\omega_{\mathbf{A}} &= \Omega_{\mathbf{F}} \Leftrightarrow \\ d(A^1dx + A^2dy + A^3dz) &= z^2dy \wedge dz + ydz \wedge dx + (2x - z)dx \wedge dy \\ &= d(z^2ydz + yzdx + x^2dy). \end{aligned}$$

Um potencial vector para F é então $\mathbf{A} = (yz, x^2, z^2y)$.
Aplicando o teorema de Stokes na superfíce com bordo $\overline{S}$ (o fecho de S), vem

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \int_{\overline{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \iint_{\overline{S}} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \int_{\partial\overline{S}} A^1dx + A^2dy + A^3dz$$

onde $\partial\overline{S}$ é munida com a orientação induzida pela regra da mão direita aplicada à normal exterior $\mathbf{n}$. Ora,

$$\begin{aligned} \partial\overline{S} &= C_1 \cup C_0 \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 4,\ y = 0\right\} \cup \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1,\ y = 3\right\}, \end{aligned}$$

pelo que, em relação a um observador no ponto $(0, 4, 0)$, C_0 tem sentido positivo e C_1 tem o sentido negativo. Assim, temos

$$\begin{aligned} \int_{\partial\overline{S}} A^1dx + A^2dy + A^3dz &= \int_{C_1} x^2dy + \int_0^{2\pi} \big(3\,\mathrm{sen}^2\, t\, d(\mathrm{sen}\, t) + 3\,\mathrm{sen}\, t\, d(\cos t)\big) \\ &= 0 - \int_0^{2\pi} 3\,\mathrm{sen}^2\, t\, dt \\ &= -3\pi. \end{aligned}$$

4. Usando o Teorema de Stokes, calcule o fluxo do campo $\mathbf{f}(x, y, z) = (1, 1, 1)$ através da superfície

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 + z^2,\ 0 < z < 1\right\},$$

segundo a normal que aponta para fora do sólido limitado por S e pelos planos $z = 0$ e $z = 1$.

Resolução: Note-se que

$$\Omega_{\mathbf{f}} = dy \wedge dz + dz \wedge dx + dx \wedge dy = d(ydz + zdx + xdy) = d\omega_{(z,x,y)},$$

pelo que, $\mathbf{A} = (z, x, y)$ é um potencial vector para $\mathbf{f}$. Aplicando o Teorema de Stokes para campos vectoriais na superfície com bordo $\overline{S}$ (o fecho de S), obtemos

$$\int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \int_{\overline{S}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \int_{\overline{S}} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \int_{\partial\overline{S}} zdx + xdy + dz,$$

onde $\partial\overline{S}$ é percorrido no sentido dado pela regra da mão direita aplicada à normal $\mathbf{n}$ dada no enuncidado. Como

$$\partial\overline{S} = \left\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\right\} \cup \left\{(x, y, 2) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 2\right\},$$

vem

$$\int_S \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dV_2 = \int_0^{2\pi} \cos\theta d(\operatorname{sen}\theta) - \int_0^{2\pi} \Big(2d(\sqrt{2}\cos\theta) + \sqrt{2}\cos\theta d(\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta)\Big) = -\pi.$$

5. Usando o Teorema de Stokes para formas diferenciais, mostre o Teorema de Stokes para campos vectoriais: seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma variedade-2 com bordo, compacta e orientável, com normal unitária $\mathbf{n}$, e seja $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1. Então,

$$\int_S (\nabla\times\mathbf{f})\cdot\mathbf{n}\,dV_2 = \int_{\partial S} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{g},$$

onde $\mathbf{g}$ percorre ∂S no sentido dado pela *regra da mão direita* em relação a $\mathbf{n}$.

Resolução: Usando a definição de fluxo, a igualdade $\Omega_{\nabla\times\mathbf{f}} = d\omega_{\mathbf{f}}$, o Teorema de Stokes e a definição de integral de linha de um campo vectorial, obtemos

$$\int_S (\nabla\times\mathbf{f})\cdot\mathbf{n}\,dV_2 = \int_S \Omega_{\nabla\times\mathbf{f}} = \int_S d\omega_{\mathbf{f}} = \int_{\partial S}\omega_{\mathbf{f}} = \int_{\partial S}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{g},$$

onde $\mathbf{g}$ percorre ∂S no sentido correspondente à orientação induzida por S em ∂S. Resta mostrar que este é o sentido dado pela regra da mão direita aplicada à normal $\mathbf{n}$. Dado $\mathbf{x}\in S$, seja $\mathbf{u}\in T_{\mathbf{x}}\partial S$ tal que $\|\mathbf{u}\| = 1$ e seja $\mathbf{r}\in T_{\mathbf{x}}S$, tal que $\mathbf{r}\perp\mathbf{u}$ e $\mathbf{r}$ é exterior a $\mathring{S}$. De acordo com a orientação induzida por S em ∂S, o sentido de $\mathbf{u}$ é positivo sse $\{\mathbf{r},\mathbf{u}\}$ é uma base positiva para $T_{\mathbf{x}}S$. Ou seja, $\mathbf{u}$ tem o sentido positivo sse $\{\mathbf{r},\mathbf{u},\mathbf{n}\}$ é uma base positiva para $\mathbb{R}^3$. Este é precisamente o sentido dado pela regra da mão direita.

6. Sejam $f,g\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ e $\mathbf{F},\mathbf{G}\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ de classe C^1. Use as correspondências $\mathbf{v}\mapsto\omega_{\mathbf{v}}$ e $\mathbf{v}\mapsto\Omega_{\mathbf{v}}$ para mostrar que

   (a) $\nabla\times(\nabla f) = \mathbf{0}$;
   (b) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) = 0$;
   (c) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$;
   (d) $\nabla\times(f\mathbf{F}) = f(\nabla\times\mathbf{F}) + (\nabla f)\times\mathbf{F}$;
   (e) $\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{G} - \mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{G})$.

Resolução: Recorde-se que as correspondências $\mathbf{v}\mapsto\omega_{\mathbf{v}}$ e $\mathbf{v}\mapsto\Omega_{\mathbf{v}}$ são biunívocas e satisfazem

(i) $\omega_{f\mathbf{v}+g\mathbf{w}} = f\omega_{\mathbf{v}} + g\omega_{\mathbf{w}}$
(ii) $\Omega_{f\mathbf{v}+g\mathbf{w}} = f\Omega_{\mathbf{v}} + g\Omega_{\mathbf{w}}$
(iii) $df = \omega_{\nabla f}$
(iv) $d\omega_{\mathbf{v}} = \Omega_{\nabla\times\mathbf{v}}$
(v) $d\Omega_{\mathbf{v}} = (\nabla\cdot\mathbf{v})dV_3$

Recorde-se também que $\omega_{\mathbf{v}}\wedge\omega_{\mathbf{w}} = \Omega_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}$ e $\omega_{\mathbf{v}}\wedge\Omega_{\mathbf{w}} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})dV_3$.

Usando estas igualdades e as propriedades da derivada exterior, obtemos

(a)

$$\begin{aligned}\Omega_{\nabla\times(\nabla f)} &= d\omega_{\nabla f} = d(df) = 0\\ \Leftrightarrow \nabla\times(\nabla f) &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}(\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F}))dV_3 &= d(\Omega_{\nabla\times\mathbf{F}}) = d(d\omega_{\mathbf{F}}) = 0\\ \Leftrightarrow \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) &= 0\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\omega_{\nabla(fg)} &= d(fg) = gdf + fdg = g\omega_{\nabla f} + f\omega_{\nabla g}\\ &= \omega_{(g\nabla f + f\nabla g)}\\ \Leftrightarrow \nabla(fg) &= g\nabla f + f\nabla g\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\Omega_{\nabla\times(f\mathbf{F})} &= d\omega_{f\mathbf{F}} = d(f\omega_{\mathbf{F}}) = df\wedge\omega_{\mathbf{F}} + fd\omega_{\mathbf{F}} = \omega_{\nabla f}\wedge\omega_{\mathbf{F}} + f\Omega_{\nabla\times\mathbf{F}}\\ &= \Omega_{(\nabla f)\times\mathbf{F} + f(\nabla\times\mathbf{F})}\\ \Leftrightarrow \nabla\times(f\mathbf{F}) &= (\nabla f)\times\mathbf{F} + f(\nabla\times\mathbf{F})\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G})dV_3 &= d\Omega_{\mathbf{F}\times\mathbf{G}} = d(\omega_{\mathbf{F}}\wedge\omega_{\mathbf{G}}) = d\omega_{\mathbf{F}}\wedge\omega_{\mathbf{G}} - \omega_{\mathbf{F}}\wedge d\omega_{\mathbf{G}}\\ &= \Omega_{\nabla\times\mathbf{F}}\wedge\omega_{\mathbf{G}} - \omega_{\mathbf{F}}\wedge\Omega_{\nabla\times\mathbf{G}}\\ &= \left((\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{G} - \mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{G})\right)dV_3\\ \Leftrightarrow \nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) &= (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{G} - \mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{G}).\end{aligned}$$

7. O campo eléctrico gerado por N cargas pontuais, q_i, $i = 1, \ldots, N$, colocadas nos pontos $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, \ldots, N$ é dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{p}_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|^3}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{p}_i \mid 1 \leq i \leq N\}.$$

   (a) Mostre que $\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$.

   (b) Demonstre a *Lei de Gauss:* se $D \subset \mathbb{R}^3$ é uma variedade-3 com bordo, compacta, tal que $\mathbf{p}_i \in \mathring{D}$, $i = 1, \ldots, N$, então

$$\int_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n} = 4\pi \sum_{i=1}^{N} q_i,$$

   onde $\mathbf{n}$ é a normal a ∂D, unitária e exterior a D.

   (c) Use os resultados das alíneas anteriores para dar um exemplo de uma forma-2 que é fechada mas não é exacta, e um exemplo de um campo *solenoidal* (ou seja, com divergência nula) que não é um *rotacional*.

Resolução:

(a) Considere-se o campo vectorial $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$. Temos,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^6} \sum_{k=1}^{3} \Big(\|\mathbf{x}\|^3 - 3(x^k)^2 \|\mathbf{x}\| \Big) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^6} \left(\|\mathbf{x}\|^3 - \|\mathbf{x}\|^3 \right) = 0.$$

Como $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \mathbf{F}(\mathbf{x} - \mathbf{p}_i)$, vem

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} q_i (\nabla \cdot \mathbf{F})(\mathbf{x} - \mathbf{p}_i) = 0.$$

(b) Consideremos o campo vectorial $\mathbf{E}_i(\mathbf{x}) = q_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{p}_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|^3}$. Sejam

$$B_R(\mathbf{p}_i) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| < R \right\}, \qquad S_R(\mathbf{p}_i) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| = R \right\}$$

e seja $R > 0$ tal que $\overline{B_R(\mathbf{p}_i)} \subset \overset{\circ}{D}$. Aplicando o Teorema da Divergência à variedade-3 $V = D \setminus B_R(\mathbf{p}_i)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{n} \, dV_2 &= \int_{S_R(\mathbf{p}_i)} \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{n} \, dV_2 - \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}_i) \, dV_3 \\
&= \int_{S_R(\mathbf{p}_i)} \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{n} \, dV_2 \\
&= \int_{S_R(\mathbf{p}_i)} \frac{q_i}{R^2} \, dV_2 = 4\pi q_i.
\end{aligned}$$

Donde,

$$\int_{\partial D} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dV_2 = \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial D} \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{n} \, dV_2 = 4\pi \sum_{i=1}^{N} q_i.$$

(c) De acordo com as alíneas anteriores, o campo $\mathbf{E}$ é solenóidal mas não é um rotacional (no seu domínio). De forma equivalente, $\Omega_{\mathbf{E}}$ é uma forma-2 fechada que não é exacta (no seu domínio).

8. Considere a forma diferencial $\omega \in \Omega(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{e}_1\})$ definida por

$$\omega = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} + \frac{y}{(x-1)^2 + y^2} \right) dx + \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} \right) dy.$$

(a) Mostre que ω é fechada.

(b) Determine se ω é exacta em $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{e}_1\}$.

(c) Determine se ω é exacta em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 4\}$.

Resolução:

(a) Consideremos a função $\mathbf{g}^*\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{g}(x,y) = (x-1,y)$. Sejam ω_0 e ω_1 as formas-1 dadas por

$$\omega_0 = \frac{-ydx}{x^2+y^2} + \frac{xdy}{x^2+y^2}, \qquad \omega_1 = \mathbf{g}^*\omega_0 = \frac{-ydx}{(x-1)^2+y^2} + \frac{(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}.$$

Temos,

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 - \omega_1 \\ d\omega_0 &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}(dy \wedge dx + dx \wedge dy) = 0 \\ d\omega_1 &= \mathbf{g}^* d\omega_0 = 0, \end{aligned}$$

logo $d\omega = d\omega_0 - d\omega_1 = 0$.

(b) Para mostrar que ω não é exacta em $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{e}_1\}$, basta mostrar que existe um caminho fechado, $\boldsymbol{\alpha}\colon [a,b] \to D$ tal que $\int_{\boldsymbol{\alpha}([a,b])} \omega \neq 0$. Consideremos o caminho fechado $\boldsymbol{\alpha}\colon [0,2\pi] \to D$ definido por $\boldsymbol{\alpha}(\theta) = \frac{1}{2}(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Temos

$$\int_{\boldsymbol{\alpha}([0,2\pi])} \omega_0 = \int_{[0,2\pi]} \boldsymbol{\alpha}^*\omega_0 = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Uma vez que ω_1 é uma fechada e de classe C^1 em $D_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{e}_1\}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ é homotópico em D_1 a um caminho constante, segue que $\int_{\boldsymbol{\alpha}([0,2\pi])} \omega_1 = 0$. Assim, temos

$$\int_{\boldsymbol{\alpha}([0,2\pi])} \omega = \int_{\boldsymbol{\alpha}([0,2\pi])} \omega_0 - \int_{\boldsymbol{\alpha}([0,2\pi])} \omega_1 = 2\pi,$$

logo ω não é exacta em D.

(c) Seja $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 > 4\}$. Para mostrar que ω é exacta em E temos de mostrar tem integral nulo ao longo de todo o caminho fechado (em E). Qualquer caminho fechado simples[1] $\boldsymbol{\alpha}\colon [a,b] \to E$, que não seja homotópico em E a um caminho constante, é homotópico a $\boldsymbol{\gamma}(\theta) = 3(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, $\theta \in [0,2\pi]$, ou ao inverso de $\boldsymbol{\gamma}$ (o caminho que percorre uma vez a imagem de $\boldsymbol{\gamma}$ no sentido negativo). Temos,

$$\begin{aligned} \int_{\boldsymbol{\gamma}([0,2\pi])} \omega &= \int_{\boldsymbol{\gamma}([0,2\pi])} \omega_0 - \int_{\boldsymbol{\gamma}([0,2\pi])} \omega_1 \\ &= 2\pi - \int_{\boldsymbol{\gamma}([0,2\pi])} \omega_1. \end{aligned}$$

Como $\boldsymbol{\gamma}$ é homotópico, em D_1, ao caminho $\boldsymbol{\beta}(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ e ω_1 é fechada, vem

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}([0,2\pi])} \omega_1 = \int_{\boldsymbol{\beta}([0,2\pi])} \omega_1 = 2\pi,$$

logo $\int_{\boldsymbol{\gamma}([0,2\pi])} \omega = 0$. Concluímos que ω é exacta em E.

[1] um caminho fechado $\mathbf{g}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ diz-se simples se $\mathbf{g}(t) = \mathbf{g}(t')$ sse $\{t,t'\} = \{a,b\}$

9. Calcule o *Laplaciano* de f, $\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f$ em coordenadas cilíndricas e use este resultado para determinar todas as soluções da equação de Laplace ($\nabla^2 f = 0$) que não dependem das coordenadas θ, z.

Resolução: Consideremos a parametrização para $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,0) \mid x \leq 0\}$ dada pelas coordenadas cilíndricas:

$$\mathbf{g}(\rho,\theta,z) = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, z), \qquad (\rho,\theta,z) \in]0,\infty[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R}.$$

Nestas coordenadas, a matriz da métrica é $G = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ e o elemento de volume é $dV_3 = dr \wedge (\rho d\theta) \wedge dz$. Os vectores $\mathbf{e}_\rho = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \rho}$, $\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta}$ e $\mathbf{e}_z = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z}$ formam, em cada ponto, uma base ortonormal para $\mathbb{R}^3$, cuja base dual é $\{d\rho, \rho d\theta, dz\}$. Dada uma função $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, de classe C^2, temos

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}(\rho d\theta) + \frac{\partial f}{\partial z} dz \\ &\sim \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho d\theta) \wedge dz + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta} dz \wedge d\rho + \frac{\partial f}{\partial z} d\rho \wedge (\rho d\theta) \\ &= \Omega_{\nabla f}, \end{aligned}$$

$$d\Omega_{\nabla f} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) dV_3.$$

Donde, concluímos que o laplaciano de f em coordenadas cilíndricas é dado por

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Se f não depende de (θ, z), então

$$\nabla^2 f = 0 \Leftrightarrow \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) = 0 \Leftrightarrow \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} = A \Leftrightarrow f = A \log \rho + B,$$

onde A e B são constantes reais.

Resolva **um** *dos seguintes problemas*

10. *(Função Gama)* Considere a função $f_s\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f_s(t) = t^{s-1}e^{-t}$, onde $s \geq 1$ é uma constante.

    (a) Mostre que $f_s \in L^1(\mathbb{R}^+)$;

    (b) Atendendo ao resultado da alínea anterior, define-se a *função Gama*, $\Gamma\colon [1,\infty[\to \mathbb{R}$, por
    $$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt.$$
    Use integração por partes para mostrar que $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

    (c) Mostre que $\Gamma(n) = (n-1)!$, para todo $n \in \mathbb{N}_1$. Portanto, a função Gama permite definir o factorial de qualquer número real positivo.

Resolução:

(a) Uma vez que f_s é contínua em $[0,\infty[$, basta analisar o seu comportamento quando $t \to +\infty$. Visto que $f_s/e^{-\frac{t}{2}} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, f_s é integrável em $\mathbb{R}^+$ se $e^{-\frac{t}{2}}$ o for. Ora, $e^{-\frac{t}{2}}$ é positiva, logo o seu integral existe e é dado por

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}}\,dt = \lim_{k\to\infty}\int_0^k e^{-\frac{t}{2}}\,dt = \lim_{k\to\infty}\left[-2e^{-\frac{t}{2}}\right]_0^k = 2 < \infty.$$

Concluímos que $f_s \in L^1(\mathbb{R}^+)$.

(b) Usando integração por partes, vem

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty f_{s+1}\,dt = \lim_{k\to\infty}\int_0^k t^s e^{-t}\,dt = \lim_{k\to\infty}\left[-t^s e^{-t}\right]_0^k + \lim_{k\to\infty} s\int_0^k t^{s-1}e^{-t}\,dt$$
$$= s\lim_{k\to\infty}\int_0^k t^{s-1}e^{-t}\,dt = s\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt = s\Gamma(s).$$

(c) Notando que $\Gamma(1) = 1 = 0!$, a igualdade $\Gamma(n) = (n-1)!$, $\forall n \in \mathbb{N}_1$, segue da relação $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ por indução.

11. A função *Zeta de Riemann,* $\zeta\colon]1,\infty[\to \mathbb{R}$, é definida por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}.$$

O objectivo deste exercício é dar uma expressão integral para ζ.

(a) Use a mudança de variável $t = nx$ na definição de $\Gamma(s)$ para mostrar que

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{s-1}e^{-nx}\,dx.$$

(b) Mostre que

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\,dx.$$

Resolução:

(a) Fazendo a mudança de variável $t = nx$ na definição da $\Gamma(s)$, obtemos

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt = \lim_{k\to\infty}\int_0^k t^{s-1}e^{-t}\,dt$$
$$= \lim_{k\to\infty}\int_0^{\frac{k}{n}} (nx)^{s-1}e^{-nx}n\,dx = n^s\int_0^\infty x^{s-1}e^{-nx}\,dx.$$

Donde,

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\Gamma(s)}{n^s} = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{s-1}e^{-nx}\,dx.$$

(b) Consideremos a sucessão de funções, $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, definida por $f_k(x) = \sum_{n=1}^{k} x^{s-1}e^{-nx}$, para $x > 0$. As funções f_k são mensuráveis (porque são contínuas) e verificam

(i) $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots f_k \leq \cdots$

(ii) $f_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} \sum_{n=1}^{\infty} x^{s-1}e^{-nx} = \frac{x^{s-1}}{e^x-1}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

Aplicando o Teorema da Convergência Monótona, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} x^s e^{-nx}\,dx = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\int_0^{\infty} x^s e^{-nx}\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{k} x^s e^{-nx}\,dx$$
$$= \lim_{k\to\infty}\int_0^{\infty} f_k(x)\,dx = \int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx.$$

Da alínea anterior, concluímos então

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx.$$