6^{a} Ficha de Exercícios de AMIII

Para entregar na aula de 16/12/02

1. Considere a superfície
$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2 + z^2 = 1\right\}.$$
   (a) Escreva uma parametrização, $\mathbf{g}\colon V \subset \mathbb{R}^2 \to T$, cuja imagem cubra T excepto duas circunferências.
   (b) Determine uma forma-2, μ, que induza uma orientação em T correspondente à normal exterior.
   (c) Determine se $\mathbf{g}$ é compatível com μ.

2. Usando o Teorema de Stokes, calcule $\int_M \omega$, com uma orientação à sua escolha, em cada um dos seguintes casos
   (a) $\omega = xdx + ydy$, $M = \left\{(e^{-t}\cos t, e^{-t}\operatorname{sen} t) \mid t \in [0,1]\right\}$;
   (b) $\omega = dx \wedge dy$, $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2+y^2 < 4\right\}$
   (c) $\omega = xdy \wedge dz - x^2 y dx \wedge dy$, $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$;
   (d) $\omega = ydy \wedge dz + dz \wedge dx$, $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\, x > 0\right\}$.

3. Considere o campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (z^2, y, 2x-z)$ e a superfície
$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 4 - x^2 - z^2\,,\, 0 < y < 3\right\}.$$
   Calcule o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S, no sentido da normal unitária exterior ao sólido limitado por S e pelos planos $y = 0$ e $y = 3$,
   (a) usando o Teorema da Divergência;
   (b) pela definição de fluxo;
   (c) usando o Teorema de Stokes.

4. Usando o Teorema de Stokes, calcule o fluxo do campo $\mathbf{f}(x,y,z) = (1,1,1)$ através da superfície
$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1+z^2,\, 0 < z < 1\right\},$$
   segundo a normal que aponta para fora do sólido limitado por S e pelos planos $z = 0$ e $z = 1$.

5. Usando o Teorema de Stokes para formas diferenciais, mostre o Teorema de Stokes para campos vectoriais: seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma variedade-2 com bordo, compacta e orientável, com normal unitária $\mathbf{n}$, e seja $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1. Então,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \int_{\partial S} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{g},$$

onde $\mathbf{g}$ percorre ∂S no sentido dado pela *regra da mão direita* em relação a $\mathbf{n}$.

6. Sejam $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{F}, \mathbf{G}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1. Use as correspondências $\mathbf{v} \mapsto \omega_{\mathbf{v}}$ e $\mathbf{v} \mapsto \Omega_{\mathbf{v}}$ para mostrar que
   (a) $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$;
   (b) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$;
   (c) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$;
   (d) $\nabla \times (f\mathbf{F}) = f(\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla f) \times \mathbf{F}$;
   (e) $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$.

7. O campo eléctrico gerado por N cargas pontuais, q_i, $i = 1, \ldots, N$, colocadas nos pontos $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, \ldots, N$ é dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{p}_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|^3}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{p}_i \mid 1 \leq i \leq N\}.$$

   (a) Mostre que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$.
   (b) Demonstre a *Lei de Gauss:* se $D \subset \mathbb{R}^3$ é uma variedade-3 com bordo, compacta, tal que $q_i \in \overset{\circ}{D}$, $i = 1, \ldots, N$, então

$$\int_{\partial D} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 4\pi \sum_{i=1}^{N} q_i,$$

   onde $\mathbf{n}$ é a normal a ∂D, unitária e exterior a D.
   (c) Use os resultados das alíneas anteriores para dar um exemplo de uma forma-2 que é fechada mas não é exacta, e um exemplo de um campo *solenoidal* (ou seja, com divergência nula) que não é um *rotacional*.

8. Considere a forma diferencial $\omega \in \Omega(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{e}_1\})$ definida por

$$\omega = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} + \frac{y}{(x-1)^2 + y^2} \right) dx + \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} \right) dy.$$

   (a) Mostre que ω é fechada.
   (b) Determine se ω é exacta em $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{e}_1\}$.
   (c) Determine se ω é exacta em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 4\}$.

9. Calcule o *Laplaciano* de f, $\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f$ em coordenadas cilíndricas e use este resultado para determinar todas as soluções da equação de Laplace ($\nabla^2 f = 0$) que não dependem das coordenadas θ, z.

Resolva **um** *dos seguintes problemas*

10. *(Função Gama)* Considere a função $f_s\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f_s(t) = t^{s-1}e^{-t}$, onde $s > 1$ é uma constante.

    (a) Mostre que $f_s \in L(\mathbb{R}^+)$;

    (b) Atendendo ao resultado da alínea anterior, define-se a *função Gama*, $\Gamma\colon]1,\infty[\to \mathbb{R}$, por

    $$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt.$$

    Use integração por partes para mostrar que $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

    (c) Mostre que $\Gamma(n) = (n-1)!$, para todo $n \in \mathbb{N}_1$. Portanto, a função Gama permite definir o factorial de qualquer número real positivo.

11. A função *Zeta de Riemann,* $\zeta\colon]1,\infty[\to \mathbb{R}$, é definida por

    $$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

    O objectivo deste exercício é dar uma expressão integral para ζ.

    (a) Use a mudança de variável $t = nx$ na definição de $\Gamma(s)$ para mostrar que

    $$\Gamma(s)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty x^{s-1}e^{-nx}\,dx.$$

    (b) Mostre que

    $$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\,dx.$$