5^{a} Ficha de Exercícios de AMIII

Resolução Sumária

1. Sejam $\mathbf{g}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma funções de classe C^∞. Mostre que

$$\mathbf{g}^*(f dx^1 \wedge dx^2 \cdots \wedge dx^n) = (f \circ \mathbf{g}) \det(D\mathbf{g}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Resolução: Seja $\omega = f dx^1 \wedge dx^2 \cdots \wedge dx^n$. Temos $\mathbf{g}^*\omega = h dx^1 \wedge dx^2 \cdots \wedge dx^n$, onde $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dada por $h(\mathbf{x}) = \mathbf{g}^*\omega(\mathbf{x})(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Como,

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}^*\omega(\mathbf{x})(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) &= f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\, dx^1 \wedge dx^2 \cdots \wedge dx^n (D\mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{e}_1, \ldots, D\mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{e}_n) \\
&= f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \det(D\mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{e}_1, \ldots, D\mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{e}_n) \\
&= (f \circ \mathbf{g})(\mathbf{x}) \det D\mathbf{g}(\mathbf{x}), \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned}$$

concluímos que $h = (f \circ \mathbf{g}) \det(D\mathbf{g})$.

2. Seja $\mathbf{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1 e $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^1. O **rotacional** de $\mathbf{v}$ é o campo vectorial definido por

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v^3}{\partial x^2} - \frac{\partial v^2}{\partial x^3}, \frac{\partial v^1}{\partial x^3} - \frac{\partial v^3}{\partial x^1}, \frac{\partial v^2}{\partial x^1} - \frac{\partial v^1}{\partial x^2} \right),$$

e a **divergência** de $\mathbf{v}$ é o campo escalar definido por

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v^1}{\partial x^1} + \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial v^3}{\partial x^3}.$$

É possível associar a $\mathbf{v}$ uma forma-1 e uma forma-2 definidas, respectivamente, por

$$\omega_{\mathbf{v}} = v^1 dx^1 + v^2 dx^2 + v^3 dx^3 \quad \text{e} \quad \Omega_{\mathbf{v}} = v^1 dx^2 \wedge dx^3 + v^2 dx^3 \wedge dx^1 + v^3 dx^1 \wedge dx^2.$$

Mostre que

(a) $d\omega_{\mathbf{v}} = \Omega_{\nabla \times \mathbf{v}}$

(b) $df = \omega_{\nabla f}$

(c) $d\Omega_{\mathbf{v}} = (\nabla \cdot \mathbf{v}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$

Resolução:

(a)

$$\begin{aligned}
d\omega_{\mathbf{v}} &= \frac{\partial v^1}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^1 + \frac{\partial v^1}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\partial v^2}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial v^2}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^2 + \\
&\quad \frac{\partial v^3}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^3 + \frac{\partial v^3}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^3 \\
&= \left(\frac{\partial v^3}{\partial x^2} - \frac{\partial v^2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial v^1}{\partial x^3} - \frac{\partial v^3}{\partial x^1} \right) dx^3 \wedge dx^1 + \left(\frac{\partial v^2}{\partial x^1} - \frac{\partial v^1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 \\
&= \Omega_{\nabla \times \mathbf{v}}.
\end{aligned}$$

(b)

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3} dx^3 = \omega_{\nabla f}.$$

(c)

$$\begin{aligned}
d\Omega_{\mathbf{v}} &= \frac{\partial v^1}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial v^2}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\partial v^3}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\
&= (\nabla \cdot \mathbf{v}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.
\end{aligned}$$

3. Decida se as formas seguintes são exactas. Se forem, calcule um potencial.

   (a) $\omega = e^y dx + xe^y dy$
   (b) $\omega = xdx + ydy + x \operatorname{sen} z dz$
   (c) $\omega = \sum_{i=1}^n x^i e^{-\|\mathbf{x}\|^2} dx^i$
   (d) $\omega = 2xydx \wedge dy - \cos z dx \wedge dz - dy \wedge dz$
   (e) $\omega = (xy + (x+z)^2) dx \wedge dy \wedge dz$

   Resolução:

   (a) ω é exacta e tem potencial $f(x,y) = xe^y$;
   (b) ω não é exacta pois não é fechada: $d\omega = \operatorname{sen} z dx \wedge dz \neq 0$;
   (c) ω é exacta e tem potencial $f(\mathbf{x}) = -\frac{e^{-\|\mathbf{x}\|^2}}{2}$;
   (d) ω é exacta e tem potencial $\eta = \operatorname{sen} z dx + (x^2 y + z) dy$;
   (e) ω é exacta e tem potencial $\eta = -(\frac{xy^2}{2} + (x+z)^2 y) dx \wedge dz$;

4. Um campo vectorial $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (de classe C^1) diz-se um *gradiente* se existir um campo escalar (de classe C^1) $\varphi : D \to \mathbb{R}$ (dito *potencial* de $\mathbf{f}$) tal que $\mathbf{f} = \nabla \varphi$. Determine se os campos vectoriais seguintes são gradientes. Se forem, calcule um potencial.

   (a) $\mathbf{f}(x,y) = (y, -x)$
   (b) $\mathbf{f}(x,y,z) = (y + \operatorname{sen}(x+z), x, \operatorname{sen}(x+z) + z)$

   Resolução: Do problema 2(b), concluímos que $\mathbf{f}$ é um gradiente *sse* $\omega_{\mathbf{f}}$ é exacta, e φ é um potencial para $\mathbf{f}$ *sse* φ é um potencial para $\omega_{\mathbf{f}}$.

(a) $\mathbf{f}$ não é um gradiente pois $\omega_{\mathbf{f}}$ não é exacta: $d\omega_{\mathbf{f}} = -2dx \wedge dy \neq 0$.

(b) $\mathbf{f}$ é um gradiente e tem potencial $\varphi = xy - \cos(x+z) + \frac{z^2}{2}$ pois $d\varphi = \omega_{\mathbf{f}}$.

Nota: *Diz-se que um campo vectorial* $\mathbf{f}$ *é* **fechado** *se a forma-*1 *que lhe está associada,* $\omega_{\mathbf{f}}$*, é fechada. Do problema 2(a) concluí-se que* $\mathbf{f}$ *é fechado* **sse** $\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{0}$*, ou seja,* **sse**

$$\frac{\partial \mathbf{f}^i}{\partial x^j} = \frac{\partial \mathbf{f}^j}{\partial x^i}, \quad \forall i, j$$

Esta condição é **necessária** *para que* $\mathbf{f}$ *seja um* **gradiente** *, mas não é* **suficiente**. *Os campos gradientes também são por vezes designados por* **conservativos**.

5. Um campo vectorial $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (de classe C^1) diz-se um *rotacional* se existir um campo vectorial (de classe C^1) $\mathbf{A} : D \to \mathbb{R}^3$ (dito *potencial vector* de $\mathbf{f}$) tal que $\mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{A}$. Determine se os campos vectoriais seguintes são rotacionais. Se forem, calcule um potencial vector.

   (a) $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, z, x)$

   (b) $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, \operatorname{sen} y, 0)$

   Resolução: Do problema 3(a), concluímos que $\mathbf{f}$ é um rotacional *sse* $\Omega_{\mathbf{f}}$ é exacta, e que $\mathbf{A}$ é um potencial vector para $\mathbf{f}$ *sse* $d\omega_{\mathbf{A}} = \Omega_{\mathbf{f}}$.

   (a) $\mathbf{f}$ é um rotacional e $\mathbf{A}(x, y, z) = \left(\frac{z^2}{2}, \frac{x^2}{2}, \frac{y^2}{2}\right)$, pois $d\omega_{\mathbf{A}} = \Omega_{\mathbf{f}}$.

   (b) $\mathbf{f}$ não é um rotacional pois $\nabla \cdot \mathbf{f} = \cos y \neq 0$, o que implica $d\Omega_{\mathbf{f}} = (\nabla \cdot \mathbf{f}) dx \wedge dy \wedge dz \neq 0$.

   Nota: *Diz-se que um campo vectorial* $\mathbf{f}$ *é* **solenoidal** *se* $\nabla \cdot \mathbf{f} = \mathbf{0}$*. Do problema 2(c) concluí-se que* $\mathbf{f}$ *é solenoidal* **sse** *a forma-*2 *que lhe está associada,* $\Omega_{\mathbf{f}}$*, é fechada. Esta condição é* **necessária** *para que* $\mathbf{f}$ *seja um* **rotacional** *, mas não é* **suficiente**.

6. Mostre que a forma diferencial $\omega(x, y, z) = \frac{-y}{(x-1)^2+y^2} dx + \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} dy + z dz$ é fechada mas não é exacta.

   Resolução: Começamos por notar que o integral de uma forma-1, exacta, ao longo de qualquer curva fechada é necessariamente zero. De facto, se $\omega = df$ e se $\mathbf{g} \colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ é uma parametização para a curva C, temos

$$\int_{\mathbf{g}([a,b])} \omega = \int_a^b \mathbf{g}^* df = \int_a^b \nabla f(\mathbf{g}(t)) \cdot \mathbf{g}'(t) dt = f(\mathbf{g}(b)) - f(\mathbf{g}(a)).$$

   Logo $\int_{\mathbf{g}([a,b])} \omega = 0$ se C é uma curva fechada, pois $\mathbf{g}(b) = \mathbf{g}(a)$.
   Assim, para mostrar que a forma ω acima não é exacta, basta encontrar uma curva fechada, C, tal que $\int_C \omega \neq 0$. Seja C a curva $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\}$ parametrizada por $\mathbf{g}(t) = (\cos t + 1, \operatorname{sen} t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$. Temos

$$\int_{\mathbf{g}([0,2\pi])} \omega = \int_0^{2\pi} \mathbf{g}^* \omega = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi,$$

   logo ω não é exacta. No entanto, ω é fechada:

$$d\omega = \frac{-((x-1)^2 + y^2) + 2y^2}{((x-1)^2 + y^2)^2} dy \wedge dx + \frac{((x-1)^2 + y^2) - 2(x-1)^2}{((x-1)^2 + y^2)^2} dx \wedge dy = 0.$$

7. Calcule os integrais das formas diferenciais dadas ao longo das variedades indicadas, com uma orientação à sua escolha:

   (a) $\omega = (x-y)dx + xdy$ ao longo de $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$, com $a, b \in \mathbb{R}^+$;

   (b) $\omega = dx \wedge dy + z^2 dy \wedge dz$ ao longo de $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 4,\ z > 0\}$;

   (c) $\omega = (1+z^2)dx \wedge dy$ ao longo de $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1+z^2, |z| < 1\}$.

Resolução:

(a) Seja $\mathbf{g}\colon]0,2\pi[\to C$ a parametrização definida por $\mathbf{g}(t) = (a\cos t, b\operatorname{sen} t)$. Temos,

$$\int_{\mathbf{g}(]0,2\pi[)} \omega = \int_0^{2\pi} \mathbf{g}^*\omega = \int_0^{2\pi} (-a^2 \operatorname{sen} t \cos t + ab \operatorname{sen}^2 t + ab\cos^2 t)dt = 2ab\pi.$$

(b) Seja $\mathbf{g}\colon V =]0,2\pi[\times]0,\pi/2[\to S$ a parametrização definida por

$$\mathbf{g}(\theta,\varphi) = (2\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, 2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, 2\cos\varphi).$$

Temos,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{g}(V)} \omega &= \iint_V \mathbf{g}^*\omega \\ &= \iint_V \big(-4\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + (2\cos\varphi)^2(-4\operatorname{sen}^2\varphi\cos\theta)\big)\, d\theta \wedge d\varphi = -4\pi.\end{aligned}$$

(c) Seja $\mathbf{g}\colon V =]0,2\pi[\times]-1,1[\to S$ a parametrização definida por

$$\mathbf{g}(\theta,z) = (\sqrt{1+z^2}\cos\theta, \sqrt{1+z^2}\operatorname{sen}\theta, z).$$

Temos

$$\int_{\mathbf{g}(V)} \omega = \iint_V \mathbf{g}^*\omega = -\iint_V (1+z^2)zd\theta \wedge dz = 0.$$

8. Seja S a superfície

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2,\ x^2+y^2 < 1,\ 0 < x < y\right\}.$$

   (a) Calcule a área de S;

   (b) Calcule o centróide de S.

Resolução:

(a) Seja $V =]0,1[\times]0,2\pi[$ e seja $\mathbf{g}\colon V \to S$ a parametrização definida por $\mathbf{g}(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, \rho^2\cos 2\theta)$. Temos,

$$\begin{aligned}\operatorname{Vol}_2(S) &= \iint_V \sqrt{\det(D\mathbf{g}^T D\mathbf{g})}\, dV_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^1 \rho\sqrt{1+4\rho^2}\, d\rho\right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{48}(5\sqrt{5}-1).\end{aligned}$$

(b) Seja $\mathbf{p} = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ o centróide de S. Temos,

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{\mathrm{Vol}_2(S)} \iint_S x dV_2 = \frac{1}{\mathrm{Vol}_2(S)} \iint_V \rho^2 \cos\theta \sqrt{1+4\rho^2}\, dV_2 \\
&= \frac{1}{\mathrm{Vol}_2(S)} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta \, \frac{1}{8} \int_0^{\mathrm{sh}^{-1}(2)} \mathrm{sh}^2 t \, \mathrm{ch}^2 t \, dt \\
&= \frac{1}{\mathrm{Vol}_2(S)} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{1}{64} \left(18\sqrt{5} - \mathrm{sh}^{-1}(2)\right) \\
&= \frac{(\sqrt{2}-1)(54\sqrt{10} - 3\sqrt{2}\,\mathrm{sh}^{-1}(2))}{40\pi\sqrt{5} - 8\pi},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{1}{\mathrm{Vol}_2(S)} \iint_S y dV_2 = \frac{1}{\mathrm{Vol}_2(S)} \iint_V \rho^2 \,\mathrm{sen}\,\theta \sqrt{1+4\rho^2}\, dV_2 \\
&= \frac{1}{\mathrm{Vol}_2(S)} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}\,\theta d\theta \frac{1}{8} \int_0^{\mathrm{sh}^{-1}(2)} \mathrm{sh}^2 t \, \mathrm{ch}^2 t dt \\
&= \frac{1}{\mathrm{Vol}_2(S)} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{64} \left(18\sqrt{5} - \mathrm{sh}^{-1}(2)\right) \\
&= \frac{54\sqrt{10} - 3\sqrt{2}\,\mathrm{sh}^{-1}(2)}{40\pi\sqrt{5} - 8\pi},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{z} &= \frac{1}{\mathrm{Vol}_2(S)} \iint_S z dV_2 = \frac{1}{\mathrm{Vol}_2(S)} \iint_V \rho^3 \cos 2\theta \sqrt{1+4\rho^2}\, dV_2 \\
&= \frac{1}{\mathrm{Vol}_2(S)} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta \, d\theta \int_0^1 \rho^3 \sqrt{1+4\rho^2}\, d\rho \\
&= \frac{1}{\mathrm{Vol}_2(S)} \frac{1}{2} \left(\frac{5\sqrt{5}}{24} + \frac{1}{120} \right) \\
&= \frac{1+25\sqrt{5}}{5\pi - 25\sqrt{5}\pi}
\end{aligned}$$

9. Calcule o trabalho realizado pela força $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2+y, y^2-x, z)$ ao longo da curva

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + 9y^2 + z^2 = 1, x+y+z=0\right\}$$

percorrida no sentido positivo em relação a um observador no ponto $(0,0,10^{10})$.

Resolução: O trabalho realizado por $\mathbf{F}$ é dado pelo seguinte integral,

$$\int_C \omega_{\mathbf{F}} = \int_C (x^2+y)dx + (y^2-x)dy + zdz = \int_C ydx - xdy,$$

onde usámos o facto de a forma $x^2dx + y^2dy + zdz$ ser exacta e de C ser uma curva fechada. Substituindo $z = -x-y$ em $4x^2+9y^2+z^2 = 1$, obtemos a equação da projecção de C no plano $x\mathcal{O}y$:

$$5x^2 + 10y^2 + 2xy = 1 \Leftrightarrow 5\left(x + \frac{y}{5}\right)^2 + \frac{49}{5}y^2 = 1.$$

Fazendo $x + \frac{y}{5} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{5}}$ e $y = \frac{\sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,\theta}{7}$, obtemos a seguinte parametrização para C:

$$\mathbf{g}(\theta) = (\frac{\cos\theta}{\sqrt{5}} - \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{7\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,\theta}{7}, -\frac{4\,\mathrm{sen}\,\theta}{7\sqrt{5}} - \frac{\cos\theta}{\sqrt{5}}), \quad \theta \in]0, 2\pi[.$$

Como $\mathbf{g}$ percorre C no sentido positivo em relação a um observador no ponto $(0, 0, 10^{10})$, o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ é

$$\begin{aligned}
\int_C ydx - xdy &= \int_0^{2\pi} \mathbf{g}^*(ydx - xdy) \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,\theta}{7} \left(-\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{5}} - \frac{\cos\theta}{7\sqrt{5}} \right) + \left(\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{7\sqrt{5}} - \frac{\cos\theta}{\sqrt{5}} \right) \frac{\sqrt{5}\cos\theta}{7} \right) d\theta \\
&= -\frac{2\pi}{7}.
\end{aligned}$$

10. A United Fighter Objects desenvolveu um motor revolucionário para o protótipo UFO-1 cujo filtro de ar tem a forma da seguinte superfície

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{y^2 + z^2} - R)^2 + z^2 = r^2, x < 0 \right\},$$

onde $r < R$ são constantes positivas. Sabendo que a velocidade do ar é dada por $\mathbf{v}(x, y, z) = -\mathbf{e}_1$ e supondo que a densidade do ar é uma constante σ_a, calcule a massa de ar que atravessa o filtro numa unidade de tempo.

Resolução: A quantidade de ar que atravessa o filtro numa unidade de tempo é dada pelo módulo do fluxo do campo vectorial $\sigma_a \mathbf{v}$ na direcção de uma normal unitária a T. Consideremos a seguinte parametrização para T,

$$\mathbf{g}(\rho, \theta) = \left(-\sqrt{r^2 - (\rho - R)^2}, \rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \right), \qquad (\rho, \theta) \in V =]R - r, R + r[\times]0, 2\pi[.$$

O fluxo de $\sigma_a \mathbf{f}$ na direcção da normal $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta}$ é

$$\int_S \Omega_{\sigma_a \mathbf{v}} = \int_V \mathbf{g}^*(-\sigma_a dy \wedge dz) = -\sigma_a \int_V \rho d\rho \wedge d\theta = -4\pi\sigma_a Rr.$$

Concluímos que filtro é atravessado por $4\pi\sigma_a Rr$ Kg de ar numa unidade de tempo.