5^{a} Ficha de Exercícios de AMIII

Para entregar na aula de 2/12/02

1. Sejam $\mathbf{g}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma funções de classe C^∞. Mostre que
$$\mathbf{g}^*(f dx^1 \wedge dx^2 \cdots \wedge dx^n) = (f \circ \mathbf{g}) \det(D\mathbf{g}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

2. Seja $\mathbf{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1 e $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^1. O **rotacional** de $\mathbf{v}$ é o campo vectorial definido por
$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v^3}{\partial x^2} - \frac{\partial v^2}{\partial x^3}, \frac{\partial v^1}{\partial x^3} - \frac{\partial v^3}{\partial x^1}, \frac{\partial v^2}{\partial x^1} - \frac{\partial v^1}{\partial x^2} \right),$$
e a **divergência** de $\mathbf{v}$ é o campo escalar definido por
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v^1}{\partial x^1} + \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial v^3}{\partial x^3}.$$
É possível associar a $\mathbf{v}$ uma forma-1 e uma forma-2 definidas, respectivamente, por
$$\omega_{\mathbf{v}} = v^1 dx^1 + v^2 dx^2 + v^3 dx^3 \quad \text{e} \quad \Omega_{\mathbf{v}} = v^1 dx^2 \wedge dx^3 + v^2 dx^3 \wedge dx^1 + v^3 dx^1 \wedge dx^2.$$
Mostre que
   (a) $d\omega_{\mathbf{v}} = \Omega_{\nabla \times \mathbf{v}}$
   (b) $df = \omega_{\nabla f}$
   (c) $d\Omega_{\mathbf{v}} = (\nabla \cdot \mathbf{v}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$

3. Decida se as formas seguintes são exactas. Se forem, calcule um potencial.
   (a) $e^y dx + x e^y dy$
   (b) $x dx + y dy + x \operatorname{sen} z dz$
   (c) $\sum_{i=1}^n x^i e^{-\|\mathbf{x}\|^2} dx^i$
   (d) $2xy dx \wedge dy - \cos z dx \wedge dz - dy \wedge dz$
   (e) $(xy + (x+z)^2) dx \wedge dy \wedge dz$

4. Um campo vectorial $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (de classe C^1) diz-se um *gradiente* se existir um campo escalar (de classe C^1) $\varphi : D \to \mathbb{R}$ (dito *potencial* de $\mathbf{f}$) tal que $\mathbf{f} = \nabla \varphi$. Determine se os campos vectoriais seguintes são gradientes. Se forem, calcule um potencial.

(a) $\mathbf{f}(x, y) = (y, -x)$

(b) $\mathbf{f}(x, y, z) = (y + \operatorname{sen}(x + z), x, \operatorname{sen}(x + z) + z)$

5. Um campo vectorial $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (de classe C^1) diz-se um *rotacional* se existir um campo vectorial (de classe C^1) $\mathbf{A} : D \to \mathbb{R}^3$ (dito *potencial vector* de $\mathbf{f}$) tal que $\mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{A}$. Determine se os campos vectoriais seguintes são rotacionais. Se forem, calcule um potencial vector.

   (a) $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, z, x)$

   (b) $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, \operatorname{sen} y, 0)$

6. Mostre que a forma diferencial $\omega(x, y, z) = \frac{-y}{(x-1)^2+y^2}dx + \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}dy + zdz$ é fechada mas não é exacta.

7. Calcule os integrais das formas diferenciais dadas ao longo das variedades indicadas, com uma orientação à sua escolha:

   (a) $(x - y)dx + xdy$ ao longo de $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$, com $a, b \in \mathbb{R}^+$;

   (b) $dx \wedge dy + z^2 dy \wedge dz$ ao longo de $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z > 0\right\}$;

   (c) $(1 + z^2)dx \wedge dy$ ao longo de $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 + z^2, |z| < 1\right\}$.

8. Seja S a superfície

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 < 1,\ 0 < x < y\right\}.$$

   (a) Calcule a área de S;

   (b) Calcule o centróide de S.

9. Calcule o trabalho realizado pela força $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y, y^2 - x, z)$ ao longo da curva

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + 9y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\right\}$$

   percorrida no sentido positivo em relação a um observador no ponto $(0, 0, 10^{10})$.

10. A United Fighter Objects desenvolveu um motor revolucionário para o protótipo UFO-1 cujo filtro de ar tem a forma da seguinte superfície

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{y^2 + z^2} - R)^2 + x^2 = r^2, x < 0\right\},$$

   onde $r < R$ são constantes positivas. Sabendo que a velocidade do ar é dada por $\mathbf{v}(x, y, z) = -\mathbf{e}_1$ e supondo que a densidade do ar é uma constante σ_a, calcule a massa de ar que atravessa o filtro numa unidade de tempo.