4^{a} Ficha de Exercícios de AMIII

Para entregar na aula de 18/11/02

1. Escreva o tensor-2 em $\mathbb{R}^3$ dado por $T(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 3(v^1 + v^2)(w^2 + w^3) - \frac{1}{2}v^3w^2 + \sqrt{5}v^3w^3$ como combinação linear dos elementos da base $\{dx^i \otimes dx^j\}_{i,j=1}^3$ para $T^2(\mathbb{R}^3)$.

2. Mostre que $\mathrm{Alt}(T) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$, $\forall T \in T^k(\mathbb{R}^n)$.

3. Calcule os seguintes produtos exteriores

   (a) $(2dx - dy) \wedge (dx + 3dy)$

   (b) $(ydx + dy + 3dz) \wedge (2dx + \pi dy + \frac{1}{3}dz)$

   (c) $(ydx + xdy + z^2dz) \wedge (2dx \wedge dy + xdy \wedge dz + z^4dx \wedge dz)$

   (d) $(dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4) \wedge (dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4 - dx^1 \wedge dx^3)$

4. Sejam $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ e $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Mostre que

   (a) $dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_k}) = 1$;

   (b) $dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ é o determinante da matriz $k \times k$ que se obtém seleccionando as colunas $i_1, \ldots, i_k$ da matriz $\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_k \end{pmatrix}$.

5. Dado um vector $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v^i\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^3$ é possível associar-lhe um covector-1, $\omega_{\mathbf{v}}$, dado por

$$\omega_{\mathbf{v}} = v^1dx^1 + v^2dx^2 + v^3dx^3,$$

   e um covector-2, $\Omega_{\mathbf{v}}$, dado por

$$\Omega_{\mathbf{v}} = v^1dx^2 \wedge dx^3 + v^2dx^3 \wedge dx^1 + v^3dx^1 \wedge dx^2.$$

   Mostra-se que

   (i) $\omega_{\mathbf{v}} \wedge \omega_{\mathbf{w}} = \Omega_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ (onde $\times$ designa o produto externo em $\mathbb{R}^3$)

   (ii) $\omega_{\mathbf{v}} \wedge \Omega_{\mathbf{w}} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$

   Verfique estas fórmulas no caso em que $\mathbf{v} = \sqrt{2}\mathbf{e}_1 + \sqrt{3}\mathbf{e}_2 + \sqrt{5}\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{w} = \pi\mathbf{e}_1 + \pi^2\mathbf{e}_2 + \pi^3\mathbf{e}_3$.

6. Calcule os *pull-backs* das formas seguintes pelas aplicações indicadas

   (a) $\frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ por $(x, y) = \mathbf{g}(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$

   (b) $x^2dx + y^2dy$ por $(x, y) = \mathbf{g}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$

(c) $xdx \wedge dy + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ por $(x, y, z) = \mathbf{g}(\theta, \varphi) = (\operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, cos\varphi)$

(d) $(x^2 + y^2)dx \wedge dy \wedge dz$ por $(x, y, z) = \mathbf{g}(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta, z)$

7. Calcule a derivada exterior das seguintes formas

   (a) $xy + e^{x^2+y^2}$

   (b) $(x + \log(x + z))dx + xzdy + \operatorname{arctg}(y + z)dz$

   (c) $x^3dy \wedge dz + ye^x dx \wedge dz$

   (d) $\sum_{i=1}^{n} x^i dx^i$