3^{a} Ficha de Exercícios de AMIII

Resolução Sumária

1. Escreva $\int_A f dV_2$ como um integral iterado nas duas ordens de integração possíveis, onde o conjunto A é:

   (a) O triângulo de vértices $(0,1)$, $(1,1)$ e $(1,0)$;

   (b) A região entre os gráficos $x = y^2$ e $x = 2y^2$, com $0 \leq y \leq 1$;

   (c) A região do 1º quadrante limitada pela recta $x + y = 1$ e pela circunferência unitária centrada na origem.

   Resolução:

   (a)
$$\int_A f dV_2 = \int_0^1 \left(\int_{1-x}^1 f(x,y)dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{1-y}^1 f(x,y)dx \right) dy;$$

   (b)
$$\begin{aligned}\int_A f dV_2 &= \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{2y^2} f(x,y)dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{\frac{x}{2}}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_{\sqrt{\frac{x}{2}}}^{1} f(x,y)dy \right) dx;\end{aligned}$$

   (c)
$$\int_A f dV_2 = \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx \right) dy.$$

2. Escreva $\int_A f dV_3$ como um integral iterado numa ordem de integração à sua escolha, onde o conjunto A é:

   (a) A região dada pelas condições $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x + y + z \geq 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$;

   (b) A região limitada pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + z = 1$ e $y + z = 1$;

   Resolução:

   (a)
$$\begin{aligned}\int_A f dV_3 = &\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_{1-x-y}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx \\ &+ \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \right) dy \right) dx;\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_A f dV_3 &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} \left(\int_0^{1-z} f(x,y,z)dx \right) dz \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} \left(\int_0^{1-z} f(x,y,z)dx \right) dy \right) dz \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{x} \left(\int_0^{1-x} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx \\ &\quad + \int_0^1 \left(\int_x^{1} \left(\int_0^{1-y} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx\end{aligned}$$

3. Inverta a ordem de integração nos seguintes integrais iterados:

(a) $\displaystyle\int_0^\pi \left[\int_{-\operatorname{sen}\frac{x}{2}}^{\operatorname{sen} x} f(x,y)dy \right] dx;$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\frac{1}{2}+2x^2} f(x,y)dy \right] dx;$

Resolução:

(a)

$$\int_0^1 \left(\int_{\operatorname{arcsen}(y)}^{\pi-\operatorname{arcsen}(y)} f(x,y)dx \right) dy + \int_{-1}^0 \left(\int_{-2\operatorname{arcsen}(y)}^{\pi} f(x,y)dx \right) dy$$

(b)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx \right) dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_{\sqrt{\frac{y}{2}-\frac{1}{4}}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx \right) dy + \int_1^{\frac{5}{2}} \left(\int_{\sqrt{\frac{y}{2}-\frac{1}{4}}}^{1} f(x,y)dx \right) dy$$

4. (a) Prove que o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função monótona (em sentido lato) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem medida nula.

(b) Prove que o centróide da união de dois subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ disjuntos e mensuráveis à Jordan pertence ao segmento de recta unindo os centróides desses conjuntos.

Resolução:

(a) Seja D o conjunto dos pontos de descontinuidade de f. Vamos mostrar que D é numerável e portanto tem medida nula. Basta mostrar que o conjunto $D_n = \{x \in [-n,n] \mid f \text{ é descontinua em } x\}$ é numerável, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $D = \cup_{n=1}^{\infty} D_n$. Podemos também supor que f é crescente, pois, se f for descrescente, $-f$ é crescente e tem os mesmos pontos de descontinuidade.

Suponhamos então que $f\colon [-n,n] \to \mathbb{R}$ é crescente. Para cada $m \in \mathbb{N}$, considere-se o conjunto

$$D_n^m = \left\{ x \in [-n,n] \mid \lim_{t\to x^+} f(t) - \lim_{t \to x^-} f(t) \geq \frac{f(n)-f(-n)}{m} \right\}.$$

Como $\# D_n^m \leq m$ e $D_n = \cup_{m=1}^{\infty} D_n^m$, concluímos que D_n é numerável.

(b) Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos disjuntos e mensuráveis à Jordan com centróides $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$, respectivamente. O conjunto $A \cup B$ é mensurável à Jordan pois $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$ e χ_A, χ_B são integráveis à Riemann. A i-ésima coordenada seu centróide, $\mathbf{r}$, é dada por

$$\begin{aligned} r^i &= \tfrac{1}{\mathrm{Vol}(A\cup B)} \int_{A\cup B} x^i dV_n = \tfrac{1}{\mathrm{Vol}(A\cup B)} \left(\int_A x^i dV_n + \int_B x^i dV_n \right) \\ &= \tfrac{\mathrm{Vol}(A)}{\mathrm{Vol}(A\cup B)} \tfrac{1}{\mathrm{Vol}(A)} \int_A x^i dV_n + \tfrac{\mathrm{Vol}(B)}{\mathrm{Vol}(A\cup B)} \tfrac{1}{\mathrm{Vol}(B)} \int_B x^i dV_n \\ &= \tfrac{\mathrm{Vol}(A)}{\mathrm{Vol}(A\cup B)} p^i + \tfrac{\mathrm{Vol}(B)}{\mathrm{Vol}(A\cup B)} q^i. \end{aligned}$$

Concluímos que $\mathbf{r} = \frac{\mathrm{Vol}(A)}{\mathrm{Vol}(A\cup B)}\mathbf{p} + \frac{\mathrm{Vol}(B)}{\mathrm{Vol}(A\cup B)}\mathbf{q}$, o que implica que $\mathbf{r}$ pertence ao segmento de recta unindo $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$, pois

$$\tfrac{\mathrm{Vol}(A)}{\mathrm{Vol}(A\cup B)} + \tfrac{\mathrm{Vol}(B)}{\mathrm{Vol}(A\cup B)} = 1 \quad \text{e} \quad \tfrac{\mathrm{Vol}(A)}{\mathrm{Vol}(A\cup B)}, \tfrac{\mathrm{Vol}(B)}{\mathrm{Vol}(A\cup B)} \geq 0.$$

5. Considere o sólido

$$A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2} \right\}$$

(a) Escreva o volume de A como um integral iterado nas ordens de integração $dzdydx$ e $dxdydz$.

(b) Calcule o volume da A.

Resolução:

(a)

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(A) &= 4 \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dz \right) dy \right) dx \\ &= 4 \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{z}} \left(\int_0^{\sqrt{z-y^2}} dx \right) dy \right) dz + 4 \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2-z^2}} \left(\int_0^{\sqrt{2-z^2-y^2}} dx \right) dy \right) dz. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(A) &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} \rho dz \right) d\rho \right) d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 \left(\rho\sqrt{2-\rho^2} - \rho^3 \right) d\rho \\ &= \pi \left(\frac{8\sqrt{2} - 7}{6} \right). \end{aligned}$$

6. Considere a seguinte região contida em $\mathbb{R}^3$

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - 1)^2 \leq z \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \right\}.$$

(a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(b) Seja $f(x,y,z) = x$. Calcule $\iiint_V f dV_3$.

Resolução:

(a) Os cortes com z constante formam quartos de coroas circulares no plano $x\mathcal{O}y$, com $x, y \geq 0$, raio exterior dado por $1+\sqrt{z}$ e raio interior dado por $1-\sqrt{z}$. Logo temos,

$$\mathrm{Vol}(V) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-\sqrt{z}} \left(\int_{\sqrt{(1-\sqrt{z})^2-y^2}}^{\sqrt{(1+\sqrt{z})^2-y^2}} dx \right) dy + \left(\int_{1-\sqrt{z}}^{1+\sqrt{z}} \left(\int_0^{\sqrt{(1+\sqrt{z})^2-y^2}} dx \right) dy \right) \right) dz.$$

(b) Em coordenadas cilíndricas temos $x = \rho\cos\theta$, logo,

$$\begin{aligned}\iiint_V x dV_3 &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^2 \left(\int_{(\rho-1)^2}^1 \rho^2 \cos\theta dz \right) \rho d \right) d\theta \\ &= \int_0^2 \rho^2(1-(\rho-1)^2)d\rho = 8/5.\end{aligned}$$

7. Seja C um cone recto, homogéneo, de altura h, diâmetro d e massa M. Calcule o centro de massa de C e o seu momento de inércia em relação ao eixo de simetria.

Resolução: Seja σ a densidade de massa de C (que é constante, pois C é homogéneo). O cone tem a seguinte forma

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \tfrac{2h}{d}\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq h\right\},$$

pelo que a sua massa é

$$M = \iiint_C \sigma dV_3 = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^h \left(\int_0^{\frac{d}{2h}z} \sigma\rho d\rho \right) dz \right) d\theta = \frac{\sigma d^2 h}{12}\pi,$$

e

$$\sigma = \frac{M}{\mathrm{Vol}(C)} = \frac{M}{\frac{d^2h}{12}\pi} = \frac{12M}{\pi d^2 h}.$$

O centro de massa tem coordenadas $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, com

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \iiint_C \sigma x dV_3 = 0 = \overline{y} = \iiint_C \sigma y dV_3 \\ \overline{z} &= \iiint_C \sigma z dV_3 = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi} \left(\int_0^h \left(\int_0^{\frac{d}{2h}z} \sigma z\rho d\rho \right) dz \right) d\theta = \frac{3}{4}h.\end{aligned}$$

O momento de inércia de C em relação ao eixo de simetria L é

$$\begin{aligned}I_L &= \iiint \sigma d_L^2 dV_3 = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^h \left(\int_0^{\frac{d}{2h}z} \sigma\rho^3 d\rho \right) dz \right) d\theta \\ &= 2\pi\sigma \int_0^h \left(\frac{d}{2h}z \right)^4 dz \\ &= \frac{3Md^2}{40}.\end{aligned}$$

8. Use uma mudança de coordenadas apropriada para calcular o momento de inércia em relação ao eixo $\mathcal{O}_y$ de uma placa fina com a seguinte forma

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq xy \leq 2,\ \tfrac{x}{2} \leq y \leq 2x,\ x, y > 0\right\},$$

supondo que a densidade de massa é igual a 1.

Resolução: Considere-se a função de classe C^1, $\mathbf{g}\colon (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{g}(x, y) = (xy, \frac{y}{x})$. Esta transformação é uma mudança de variáveis pois tem inversa de classe C^1, $\mathbf{g}^{-1}(u, v) = (\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv})$. Como $A \subset \mathbf{g}((\mathbb{R}^+)^2)$ podemos aplicar a fórmula de mudança de variáveis para obter

$$I_y = \iint_A x^2 dV_2 = \iint_{\mathbf{g}^{-1}(A)} \left(\sqrt{\frac{u}{v}}\right)^2 \frac{1}{2v} dV_2 = \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{u}{2v^2} dv\right) du = \frac{9}{8},$$

onde usámos $\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{2y}{x} = 2v.$

9. Para cada $a > 0$, seja $B_n(a)$ o seguinte conjunto

$$B_n(a) = \left\{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid |x^1| + \cdots + |x^n| \leq a\right\},$$

e seja $V_n(a)$ o volume n-dimensional de $B_n(a)$, *i.e.*, $V_n(a) = \int \cdots \int_{B_n(a)} dx^1 \cdots dx^n$. Mostre que

(a) $V_n(a) = a^n V_n(1)$;

(b) $V_n(1) = V_{n-1}(1) \displaystyle\int_{-1}^1 (1 - |x|)^{n-1} dx = \frac{2}{n} V_{n-1}(1)$;

(c) $V_n(a) = \dfrac{2^n a^n}{n!}$.

Resolução:

(a) Usando a transformação de coordenadas $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = a\mathbf{x}$, vem

$$V_n(a) = \int_{B_n(a)} 1 dV_n = \int_{\mathbf{g}^{-1}(B_n(a))} 1 \left|\det D\mathbf{g}\right| dV_n = \int_{B_n(1)} a^n dV_n = a^n V_n(1).$$

(b) Note-se que

$$\begin{aligned} B_n(1) &= \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |x^1| + \cdots + |x^{n-1}| \leq 1 - |x^n|\right\} \\ &= \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (x^1, \ldots, x^{n-1}) \in B_{n-1}(1 - |x^n|),\ x^n \in [-1, 1]\right\}, \end{aligned}$$

logo, aplicando o Teorema de Fubini e a alínea anterior, obtemos

$$\begin{aligned} V_n(1) &= \int_{-1}^1 \left(\int_{B_{n-1}(1-|x^n|)} 1 dV_{n-1}\right) dx^n = \int_{-1}^1 V_{n-1}(1 - |x^n|) dx^n \\ &= \int_{-1}^1 (1 - |x^n|)^{n-1} V_{n-1}(1) dx^n = V_{n-1}(1) \int_{-1}^1 (1 - |x|)^{n-1} dx \\ &= 2V_{n-1}(1) \left[\frac{(1 - x)^n}{n}\right] = \frac{2V_{n-1}(1)}{n} \end{aligned}$$

(c) De (a) e (b), vem

$$V_n(a) = a^n V_n(1) = a^n \left(\frac{2}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdots \frac{2}{1} \right) = \frac{2^n a^n}{n!}.$$

10. O construtor de aviões e helicópteros militares United Fighter Objects tenciona testar proximamente o seu primeiro protótipo UFO-0. A fuselagem do UFO-0 tem a forma aproximada de um cilindro sólido homogéneo de raio r, altura h e massa M. As suas asas podem ser consideradas como uma placa rectangular homogénea de comprimento l, largura w e massa m, colocada a meio da fuselagem passando pelo eixo de simetria desta. Calcule o momento de inércia do UFO-0 em relação ao seu eixo de simetria.

    Resolução: A fuselagem e as asas do UFO-0 têm, respectivamente, a forma dos subconjuntos de $\mathbb{R}^3$,

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq r, \, |z| \leq \frac{h}{2} \right\}$$

e

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, \; r \leq |y| \leq \frac{l}{2}, \; |z| \leq \frac{w}{2} \right\},$$

onde se removeu a intersecção entre a placa e o cilindro. Assim, designando, respectivamente, por σ_f e σ_a a densidade de massa da fuselagem e das asas, as contribuições de F e A para o momento de inércia são

$$\begin{aligned} I_z(F) &= \iiint_F (x^2 + y^2) \sigma_f dV_3 = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho^3 \sigma_f d\rho \right) d\rho \right) d\theta \\ &= 2\pi \sigma_f h \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^r = \pi \sigma_f h \frac{r^4}{2}. \end{aligned}$$

e

$$I_z(A) = \iint_A y^2 \sigma_a dV_2 = 2 \int_r^{\frac{l}{2}} \left(\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \sigma_a y^2 dz \right) dy = \frac{2}{3} w \sigma_a \left(\frac{l^3}{8} - r^3 \right).$$

Substituindo

$$\sigma_f = \frac{M}{\mathrm{Vol}_3(F)} = \frac{M}{\pi r^2 h}, \qquad \sigma_a = \frac{m}{\mathrm{Vol}_2(A)} = \frac{m}{w(l - 2r)}$$

nas expressões acima e adicionando, obtemos

$$I_z(\text{UFO-0}) = \frac{Mr^2}{2} + \frac{m}{12}(l^2 + 2lr + 4r^2).$$