3^{a} Ficha de Exercícios de AMIII

Para entregar na aula teórica de 4/11/02

1. Escreva $\int_A f dV_2$ como um integral iterado nas duas ordens de integração possíveis, onde o conjunto A é:

   (a) O triângulo de vértices $(0,1)$, $(1,1)$ e $(1,0)$;

   (b) A região entre os gráficos $x = y^2$ e $x = 2y^2$, com $0 \leq y \leq 1$;

   (c) A região do 1º quadrante limitada pela recta $x + y = 1$ e pela circunferência unitária centrada na origem.

2. Escreva $\int_A f dV_3$ como um integral iterado numa ordem de integração à sua escolha, onde o conjunto A é:

   (a) A região dada pelas condições $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x+y+z \geq 1$ e $x^2+y^2+z^2 \leq 1$;

   (b) A região limitada pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + z = 1$ e $y + z = 1$;

3. Inverta a ordem de integração nos seguintes integrais iterados:

   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \left[\int_{-\operatorname{sen} \frac{x}{2}}^{\operatorname{sen} x} f(x,y)dy \right] dx$;

   (b) $\displaystyle\int_0^{1} \left[\int_{x^2}^{\frac{1}{2}+2x^2} f(x,y)dy \right] dx$;

4. (a) Prove que o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função monótona (em sentido lato) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem medida nula.

   (b) Prove que o centróide da união de dois subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ disjuntos e mensuráveis à Jordan pertence ao segmento de recta unindo os centróides desses conjuntos.

5. Considere o sólido

$$A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2} \right\}$$

   (a) Escreva o volume de A como um integral iterado nas ordens de integração $dzdydx$ e $dxdydz$.

   (b) Calcule o volume da A.

6. Considere a seguinte região contida em $\mathbb{R}^3$

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - 1)^2 \leq z \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \right\}.$$

a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

b) Seja $f(x,y,z)=x$. Calcule $\iiint_V f dV_3$.

7. Seja C um cone recto, homogéneo, de altura h, diâmetro d e massa M. Calcule o centro de massa de C e o seu momento de inércia em relação ao eixo de simetria.

8. Use uma mudança de coordenadas apropriada para calcular o momento de inércia em relação ao eixo $\mathcal{O}_y$ de uma placa fina com a seguinte forma

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\leq xy\leq 2,\ \tfrac{x}{2}\leq y\leq 2x,\ x,y>0\right\},$$

supondo que a densidade de massa é igual a 1.

9. Para cada $a>0$, seja $B_n(a)$ o seguinte conjunto

$$B_n(a)=\left\{(x^1,\ldots,x^n)\in\mathbb{R}^n \mid |x^1|+\cdots+|x^n|\leq a\right\},$$

e seja $V_n(a)$ o volume n-dimensional de $B_n(a)$, *i.e.*, $V_n(a)=\int\cdots\int_{B_n(a)} dx^1\cdots dx^n$. Mostre que

(a) $V_n(a)=a^nV_n(1)$;

(b) $V_n(1)=V_{n-1}(1)\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-|x|)^{n-1}dx=\frac{2}{n}V_{n-1}(1)$;

(c) $V_n(a)=\dfrac{2^na^n}{n!}$.

10. O construtor de aviões e helicópteros militares United Fighter Objects tenciona testar proximamente o seu primeiro protótipo UFO-0. A fuselagem do UFO-0 tem a forma aproximada de um cilindro sólido homogéneo de raio r, altura h e massa M. As suas asas podem ser consideradas como uma placa rectangular homogénea de comprimento l, largura w e massa m, colocada a meio da fuselagem passando pelo eixo de simetria desta. Calcule o momento de inércia do UFO-0 em relação ao seu eixo de simetria.