2^{a} Ficha de Exercícios de AMIII

Resolução Sumária

1. Mostre que os seguintes conjuntos são variedades e indique a respectiva dimensão:

   (a) $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3+y^3+z^3 = 1\right\}$;

   (b) $C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = x+y+\frac{1}{2},\ x+y+z = 1\right\}$;

   (c) $M = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2+y^2+z^2-w^2 = 1\right\}$.

   Resolução:

   (a) Seja $F(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-1$. Como $S = F^{-1}(0)$ e $DF = \begin{bmatrix}3x^2 & 3y^2 & 3z^2\end{bmatrix}$ tem característica máxima (igual a 1), $\forall (x,y,z) \in S$, pois $\mathbf{0} \notin S$, concluímos que S é uma variedade-2.

   (b) Seja $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2+y^2-x-y-\frac{1}{2}, x+y+z-1)$. Como $C = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{0})$ e a matriz

   $$D\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2x-1 & 2y-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   tem característica máxima (igual a 2), $\forall (x,y,z) \in C$, pois $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \notin C$, concluímos C é uma variedade-1.

   (c) Seja $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-w^2-1$. Como $M = F^{-1}(0)$ e $DF = \begin{bmatrix}2x & 2y & 2z & -2w\end{bmatrix}$ tem característica máxima (igual a 1), $\forall (x,y,z,w) \in M$, pois $\mathbf{0} \notin M$, concluímos que M é uma variedade-3.

2. Calcule o espaço tangente e o espaço normal a cada uma das variedades seguintes nos pontos indicados:

   (a) $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3+y^3+z^3 = 1\right\}$, em $(0,0,1)$;

   (b) $C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = x+y+\frac{1}{2},\ x+y+z = 1\right\}$, em $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1)$;

   (c) $M = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2+y^2+z^2-w^2 = 1\right\}$, em $(1,1,0,1)$.

   Resolução:

   (a)

   $$DF(0,0,1) = \begin{bmatrix}0 & 0 & 3\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} T^{\perp}_{(0,0,3)}S &=& \operatorname{span}\{(0,0,1)\} \\ T_{(0,0,1)}S &=& \operatorname{span}\{(1,0,0),(0,1,0)\} \end{cases}$$

(b)

$$DF(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} T^{\perp}_{(\frac{3}{2},\frac{1}{2},-1)}C & = & \operatorname{span}\{(2,0,0),(1,1,1)\} \\ T_{(\frac{3}{2},\frac{1}{2},-1)}C & = & \operatorname{span}\{0,1,-1)\} \end{cases}$$

(c)

$$DF(1,1,0,1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} T^{\perp}_{(1,1,0,1)}M & = & \operatorname{span}\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4\} \\ T_{(1,1,0,1)}M & = & \operatorname{span}\{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3\} \end{cases}$$

3. Considere a curva $C \subset \mathbb{R}^3$ descrita pelas equações $x + y + z = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Determine os pontos que o plano ortogonal a C é vertical.

   Resolução: Seja $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y+z-1, x^2+y^2+z^2-1$. Temos $M = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{0})$ e

   $$\operatorname{rank} D\mathbf{F}(x,y,z) = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{bmatrix} = 2, \quad \forall (x,y,z) \in C,$$

   pelo que $T^{\perp}_{(x,y,z)}C = \operatorname{span}\{(1,1,1),((x,y,z)\}$. Portanto,

   $$\begin{aligned} T^{\perp}_{(x,y,z)}C \text{ é vertical} \quad & \Leftrightarrow \quad \mathbf{e}_3 \in \operatorname{span}\{(1,1,1),(x,y,z)\} \wedge [(x,y,z) \in C] \\ & \Leftrightarrow \quad x = y \wedge [(x,y,z) \in C] \\ & \Leftrightarrow \quad (x,y,z) \in \left\{(0,0,1), \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}\right)\right\}. \end{aligned}$$

4. Determine se os conjuntos seguintes são variedades.

   (a) $M_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 - (x^2+z^2)^2 = 0\right\}$;
   (b) $M_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^3 - (\arctan(x^2+z^2))^3 = 0\right\}$.

   Justifique as suas respostas.

   Resolução:

   (a) De
   $$y^2 - (x^2+z^2)^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm(x^2+z^2),$$
   concluímos que não existe nenhuma vizinhança U de $\mathbf{0} \in M_1$ tal que $M_1 \cap U = \operatorname{Grafico}(f) \cap U$, com $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Portanto, M_1 não é uma variedade-2;

   (b) De
   $$y^3 - (\arctan(x^2+z^2))^3 = 0 \Leftrightarrow y = \arctan(x^2+z^2),$$
   segue $M_2 = \operatorname{Grafico}(f)$, onde $f(x,z) = \arctan(x^2+z^2)$, logo M_2 é uma variedade-2.

5. Escreva a equação do plano tangente ao gráfico da função $f(x,y) = x^2 - y^2$, no ponto $(2,1,3)$.

   Resolução: Seja $F(x,y,z) = z - x^2 + y^2$ e $\mathbf{p} = (2,1,3)$. Temos, $\operatorname{Grafico}(f) = F^{-1}(0)$, $\operatorname{rank} DF(x,y,z)) = \operatorname{rank}\left[\begin{smallmatrix} -2x & 2y & 1 \end{smallmatrix}\right] = 1$, $\forall (x,y,z) \in \operatorname{Grafico}(f)$, e $DF(\mathbf{p}) = \left[\begin{smallmatrix} -4 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Portanto, a equação do plano tangente ao gráfico de f em $\mathbf{p}$ é

   $$-4(x-2) + 2(y-1) + (z-3) = 0.$$

6. Sejam a, b, c números reais tais que $0 < a \leq b \leq c$. Determine os pontos do elipsóide

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$$

mais próximos da origem. Justifique a sua resposta.

Resolução: Pretendemos determinar os pontos de mínimo de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ em E (que existem pois E é compacto e f é contínua). Seja $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$. Temos,

$$\begin{cases} \nabla(f + \lambda F) = \mathbf{0} \\ F = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right) = 0 \\ y\left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right) = 0 \\ z\left(1 + \frac{\lambda}{c^2}\right) = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \end{cases}$$

Considerando separadamente os casos $a < b$, $a = b < c$ e $a = b = c$ obtemos os seguintes pontos de mínimo de $f_{|M}$ (todos à distância a da origem)

$$\begin{cases} \{(\pm a, 0, 0)\}, & \text{se } a < b \\ \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = a^2\}, & \text{se } a = b < c \\ E, & \text{se } a = b = c. \end{cases}$$

7. Determine os extremos da função $f(x, y, z) = 4 - x^2 - 3y^2 - 5z^2$ no conjunto $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Justifique a sua resposta.

Resolução: Como B é compacto e f é contínua, $f_{|B}$ tem máximo e mínimo. No interior de B, os extremos só podem ocorrer em pontos críticos:

$$\nabla f = \mathbf{0} \Leftrightarrow (-2x, -6y, -10z) = \mathbf{0} \Leftrightarrow (x, y, z) = \mathbf{0}.$$

Para determinar os candidatos a pontos de extremo da fronteira de B, aplicamos o método dos multiplicadores de Lagrange. Seja $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Temos,

$$\begin{cases} \nabla(f + \lambda F) = \mathbf{0} \\ F = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x(\lambda - 1) = 0 \\ y(\lambda - 3) = 0 \\ z(\lambda - 5) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x, y, z) = (\pm 1, 0, 0) \\ \lambda = 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} (x, y, z) = (0, \pm 1, 0) \\ \lambda = 3 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} (x, y, z) = (0, 0, \pm 1) \\ \lambda = 5 \end{cases}$$

Como $f(\pm 1, 0, 0) = 3$, $f(0, \pm 1, 0) = 1$, $f(0, 0, \pm 1) = -1$ e $f(0, 0, 0) = 4$, concluímos que o máximo de f em B é 4 e o mínimo é -1.

8. A companhia de aviação comercial On-time-or-Crash.com planeia adquirir uma frota de aviões Boeing 737-600, Airbus A319 e McDonnell Douglas MD-90. De acordo com os dados do seu departamento técnico, a utilidade de uma frota constituída por x Boeing 737-600, y Airbus A319 e z MD-90 é dada pela função $f(x, y, z) = 4\sqrt{x} + 6\sqrt{y} + 2\sqrt{z}$. Sabendo

que a On-time-or-Crash.com não tem pessoal para operar mais que 28 aviões, determine a composição da frota que esta deve comprar.

Resolução: O problema consiste em determinar os pontos de máximo de f em $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \geq 0,\ x+y+z \leq 28\}$ (que existe pois f é contínua e B é compacto). Seja $\mathbf{p} \in B$ um ponto de máximo. Analisando a função f, facilmente se conclui que $\mathbf{p} \in \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \geq 0,\ x+y+z = 28\}$. Portanto, há dois casos a considerar:

i. $\mathbf{p} \in P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z > 0,\ x+y+z = 28\}$. Aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange, vem

$$\begin{cases} \nabla\big(f + \lambda(x+y+z-28)\big)(\mathbf{p}) = \mathbf{0} \\ x+y+z = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{\lambda^2} = 8 \\ y = \frac{9}{\lambda^2} = 18 \\ z = \frac{1}{\lambda^2} = 2 \end{cases}$$

ii. $\mathbf{p} \in L_1 \cup L_2 \cup L_3$, onde

$$L_1 = \{(x,y,0) \mid x+y = 28\}, \qquad L_2 = \{(x,0,z) \mid x+z = 28\},$$
$$L_3 = \{(0,y,z) \mid y+z = 28\}.$$

Basta considerar o caso $\mathbf{p} \in L_1$, pois $\max f_{|L_1} \geq \max f_{|L_2}$ e $\max f_{|L_1} \geq \max f_{|L_3}$. Estudando a função $g(t) = 4\sqrt{t} + 6\sqrt{28-t}$ no intervalo $[0,28]$, obtemos $\max f_{|L_1} = f(\frac{112}{13}, 28 - \frac{112}{13}, 0) = 4\sqrt{91}$.

Como $f(8,18,2) = 28\sqrt{2} > 4\sqrt{91}$, concluímos que a On-time-or-Crash.com deve comprar uma frota constituída por 8 Boeing 737-600, 18 Airbus A319 e 2 McDonnell Douglas MD-90.

9. Considere a curva $C \subset \mathbb{R}^3$ descrita pelas equações $x+y+z = 4$ e $z = x^2+y^2$.

(a) Determine quais são os pontos de C que têm vizinhanças em que pode garantir ser possível parametrizar C usando x como parâmetro.

(b) Utilize a parametrização referida na alínea (a) para determinar um vector tangente a C no ponto $(1,1,2)$.

Resolução:

(a) Seja $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y+z-4, x^2+y^2-z)$. Temos $C = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{0})$ e $|\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial(y,z)}| = \left|\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2y & -1 \end{smallmatrix}\right| = -1-2y$. Pelo Teorema da Função Implícita, para cada $(x_0,y_0,z_0) \in C$ tal que $y_0 \neq -\frac{1}{2}$ existe uma vizinhança $U \ni (x_0,y_0,z_0)$ e uma função $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tais que $C \cap U = \mathrm{Grafico}(\mathbf{f}) \cap U$ e portanto $C \cap U$ é parametrizada por $\mathbf{g}(x) = (x, \mathbf{f}(x))$. Concluímos que cada $(x_0,y_0,z_0) \in C \cap \{(x,y,z) \mid y \neq -\frac{1}{2}\}$ tem uma vizinhança na qual é possível parametrizar C usando x como parâmetro.

(b) Da alínea anterior concluímos que $\mathbf{g}'(1) = (1, \mathbf{f}'(1))$ é um vector tangente a C em $(1,1,2)$. Temos,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'(1) &= -\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial(y,z)}(1,1,2)\right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(1,1,2) \\ &= -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

portanto $(1,-1,0) \in T_{(1,1,2)}C$.

10. Considere o sólido S definido por,

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} < z < 1-x^2-y^2\,;\, y>0\,;\, x>y\right\}.$$

Descreva detalhadamente os cortes de S perpendiculares aos eixos $\mathcal{O}_x$ e $\mathcal{O}_z$.

Resolução: O sólido S é uma secção de um cone com uma bola de gelado. Como o vértice do parabolóide $z=1-x^2-y^2$ é o ponto $(0,0,1)$, a coordenada z assume todos os valores do intervalo $[0,1]$. Seja $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$,*i.e.*, ρ é a distância ao eixo Oz. Resolvendo a equação $\rho^2+\rho-1=0$, conclui-se que a bola de gelado e o cone se intersectam numa circunferência de raio $R=(\sqrt{5}-1)/2$, contida no plano $z=R$.

Assim, para os cortes perpendiculares ao eixo Oz há dois casos a considerar: $z\in[0,R]$ e $z\in[R,1]$. No primeiro caso o corte é limitado pela intersecção com o cone, enquanto no caso segundo o corte é limitado pela intersecção com a bola. As figuras 1 e 2 ilustram estes cortes.

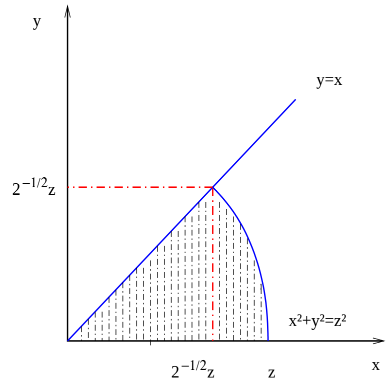

Figura 1: Corte perpendicular ao eixo Oz, com $z\in[0,R]$

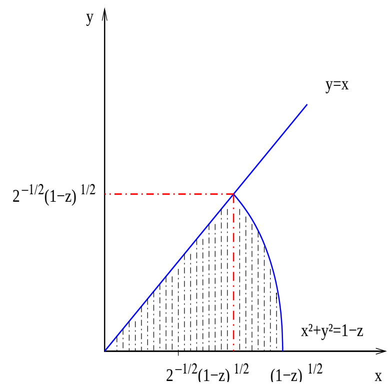

Figura 2: Corte perpendicular ao eixo Oz, com $z\in[R,1]$

Das figuras 1 e 2, concluímos que, em S, x varia entre 0 e R. Para cortes perpendiculares ao eixo Ox há também dois casos a considerar: $x\in[0,\frac{R}{\sqrt{2}}]$ e $x\in[\frac{R}{\sqrt{2}},R]$. No primeiro caso a figura que se obtém é limitada à direita pela intersecção com o plano $x = y$ e, no segundo caso, a figura é limitada à direita pela intersecção com a bola e o cone. As figuras 3 e 4 ilustram estes cortes.

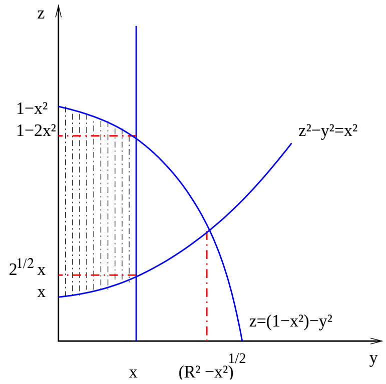

Figura 3: Corte perpendicular ao eixo Ox, com $x \in [0, \frac{R}{\sqrt{2}}]$

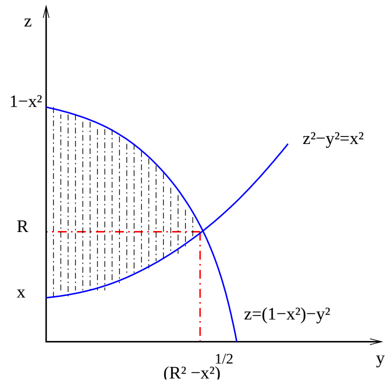

Figura 4: Corte perpendicular ao eixo Ox, com $x \in [\frac{R}{\sqrt{2}}, R]$