

2ª Ficha de Exercícios de AMIII

Para entregar na aula teórica de 18/10/02

1. Mostre que os seguintes conjuntos são variedades e indique a respectiva dimensão:

- (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^3 + z^3 = 1\}$;
- (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = x + y + \frac{1}{2}, x + y + z = 1\}$;
- (c) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = 1\}$.

2. Calcule o espaço tangente e o espaço normal a cada uma das variedades seguintes nos pontos indicados:

- (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^3 + z^3 = 1\}$, em $(0, 0, 1)$;
- (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = x + y + \frac{1}{2}, x + y + z = 1\}$, em $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1)$;
- (c) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = 1\}$, em $(1, 1, 0, 1)$.

3. Considere a curva $C \subset \mathbb{R}^3$ descrita pelas equações $x + y + z = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Determine os pontos que o plano ortogonal a C é vertical.

4. Determine se os conjuntos seguintes são variedades.

- (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 - (x^2 + z^2)^2 = 0\}$;
- (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^3 - (\arctan(x^2 + z^2))^3 = 0\}$.

Justifique as suas respostas.

5. Escreva a equação do plano tangente ao gráfico da função $f(x, y) = x^2 - y^2$, no ponto $(2, 1, 3)$.

6. Sejam a, b, c números reais tais que $0 < a \leq b \leq c$. Determine os pontos do elipsóide

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

mais próximos da origem. Justifique a sua resposta.

7. Determine os extremos da função $f(x, y, z) = 4 - x^2 - 3y^2 - 5z^2$ no conjunto $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Justifique a sua resposta.

8. A companhia de aviação comercial On-time-or-Crash.com planeia adquirir uma frota de aviões Boeing 737-600, Airbus A319 e McDonnell Douglas MD-90. De acordo com os dados do seu departamento técnico, a utilidade de uma frota constituída por x Boeing 737-600, y Airbus A319 e z MD-90 é dada pela função $f(x, y, z) = 4\sqrt{x} + 6\sqrt{y} + 2\sqrt{z}$. Sabendo que a On-time-or-Crash.com não tem pessoal para operar mais que 28 aviões, determine a composição da frota que esta deve comprar.
9. Considere a curva $C \subset \mathbb{R}^3$ descrita pelas equações $x + y + z = 4$ e $z = x^2 + y^2$.
- (a) Determine quais são os pontos de C que têm vizinhanças em que pode garantir ser possível parametrizar C utilizando x como parâmetro.
- (b) Utilize a parametrização referida na alínea (a) para determinar um vector tangente a C no ponto $(1, 1, 2)$.
10. Considere o sólido S definido por,

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} < z < 1 - x^2 - y^2; y > 0; x > y \right\}.$$

Descreva detalhadamente os cortes de S perpendiculares aos eixos \mathcal{O}_x e \mathcal{O}_z .