1^{a} Ficha de Exercícios de AMIII

Resolução Sumária

1. Sejam $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ e $g(r,\theta) = f(x,y)$.

   (a) Exprima $\frac{\partial g}{\partial r}$ e $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ em função das derivadas parciais de f.

   (b) Mostre que
   $$\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

   Resolução:

   (a)
   $$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad \frac{\partial g}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x} r\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{\partial f}{\partial y} r\cos\theta.$$

   (b)
   $$\begin{aligned}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2 &= \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)\left(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta\right) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.\end{aligned}$$

2. Seja $g(x,y) = f(x+y, e^{xy})$. Calcule a derivada parcial $D_{12}g$ em função das derivadas parciais de f (recorde que $D_{12}g := \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$).

   Resolução: Temos
   $$D_1 g(x,y) = D_1 f(x+y, e^{xy}) + y e^{xy} D_2 f(x+y, e^{xy}),$$
   logo
   $$\begin{aligned}D_{12}g(x,y) = &D_{11}f(x+y,e^{xy}) + xe^{xy}D_{12}f(x+y,e^{xy}) + e^{xy}(1+xy)D_2 f(x+y,e^{xy}) \\ &+ ye^{xy}(D_{21}f(x+y,e^{xy}) + xe^{xy}D_{22}f(x+y,e^{xy})).\end{aligned}$$

3. Determine e classifique os pontos críticos das funções seguintes:

   (a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + 7$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

   (b) $f(x,y) = (x-y+1)^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

   (c) $f(x,y) = \mathrm{sen}(x)\,\mathrm{ch}(y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (recorde que $\mathrm{ch}\,y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$)

Resolução:

(a)

$$\nabla f = \mathbf{0} \Leftrightarrow (2x - y - 2, 2y - x) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Como $\det H_{\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)}(f) = \det \left[\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right] = 3 > 0$ e $\operatorname{tr} H_{\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)}(f) = 4 > 0$, concluímos que $H_{\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)}(f)$ é definida positiva. Portanto, $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ é um ponto de mínimo.

(b)

$$\nabla f = \mathbf{0} \Leftrightarrow (2(x - y + 1), 2(x - y + 1)) = (0,0) \Leftrightarrow y = x + 1$$

Como $f(x, x+1) = 0$ e $f \geq 0$, concluímos que os pontos críticos, $(x, x+1)$, $x \in \mathbb{R}$, são pontos de mínimo global.

(c)

$$\nabla f = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\cos x \operatorname{ch} y, \operatorname{sen} x \operatorname{sh} y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) \in \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

A matriz Hessiana, $H_{(\frac{\pi}{2}+k\pi,0)}(f) = \left[\begin{smallmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \mp 1 \end{smallmatrix}\right]$, é indefinida pelo que os pontos críticos, $(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, são pontos de sela.

4. Sejam $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$. Determine o mínimo e o ponto de mínimo da função $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2$.

Resolução: A função f tem um único ponto crítico:

$$\nabla f = \mathbf{0} \Leftrightarrow 2\sum_{i=1}^{m} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{p} := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \mathbf{x}_i.$$

Como $f(\mathbf{x}) \xrightarrow[\|\mathbf{x}\| \to +\infty]{} +\infty$, concluímos que $\mathbf{p}$ é um ponto de mínimo global: seja R tal que $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{p})$, para $\|\mathbf{x}\| \geq R$. O mínimo de f em $\overline{B_R(\mathbf{0})}$ (que existe, pois f é contínua e $\overline{B_R(\mathbf{0})}$ é compacto) só pode ocorrer no ponto crítico $\mathbf{p}$. Logo, $f(\mathbf{p}) = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m \|\sum_{j=1}^m (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)\|^2$ é o mínimo global.

5. *Método dos mínimos quadrados.* Dados n números reais distintos $x_1, \ldots, x_n$ e n números reais $y_1, \ldots, y_n$ (não necessariamente distintos) é, em geral, impossível encontrar uma recta $y = ax + b$ que passe por todos os pontos (x_i, y_i), para $i = 1, \ldots, n$. No entanto, é possível determinar a função linear $f(x) = ax + b$ que minimiza a soma dos quadrados dos erros

$$E(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - y_i\right)^2.$$

Determine os números a e b que satisfazem esta condição.

Resolução: Sejam $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ e $\overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$. A função E tem um único ponto crítico:

$$\nabla f = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i(ax_i + b - y_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a_0 := \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x}) y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2} \\ b = b_0 := \overline{y} - a\overline{x} \end{cases}$$

Como $f(a,b) \xrightarrow[\|(a,b)\| \to +\infty]{} +\infty$, concluímos que (a_0, b_0) é um ponto de mínimo global.

6. Determine os extremos da função $f(x,y) = x^2 e^{-x^4-y^2}$ em $\mathbb{R}^2$. Justifique a sua resposta.
Resolução: Pontos críticos:

$$\nabla f = \mathbf{0} \Leftrightarrow e^{-x^4-y^2}(2x - 4x^5, -2yx^2) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-2x^4) = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x,y) = (\pm 2^{-\frac{1}{4}}, 0) \quad \text{ou} \quad (x,y) \in \{(0,t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Como $f \geq 0$ e $f(0,y) = 0$, os pontos $(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$, são pontos de mínimo global. A matriz Hessiana $H_{(\pm 2^{-\frac{1}{4}},0)} = \begin{bmatrix} -8e^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$ é definida negativa, portanto, $f(\pm 2^{-\frac{1}{4}}, 0) = 2^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}}$ é um máximo local (de facto, é máximo global, pois $f(x,y) \xrightarrow[\|(x,y)\| \to \infty]{} 0$).

7. Seja $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathbf{f}(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

(a) Mostre que $\mathbf{f}$ é localmente invertível em $\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$, i.e., que dado um ponto qualquer $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$ existe uma vizinhança $V \ni \mathbf{x}_0$ na qual $\mathbf{f}$ é invertível.

(b) Será $\mathbf{f}$ globalmente invertível? Justifique.

(c) Calcule $D\mathbf{f}^{-1}(1,0)$.

Resolução:

(a) Temos,

$$J\mathbf{f}(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4(x^2 + y^2) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0).$$

Pelo Teorema da Função Inversa, $\mathbf{f}$ é localmente invertível em $\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$.

(b) $\mathbf{f}$ não é globalmente invertível pois não é injectiva: $\mathbf{f}(x,y) = \mathbf{f}(-x,-y)$.

(c) Seja V uma vizinhança de $(-1,0)$ na qual $\mathbf{f}$ é invertível e seja $\mathbf{f}^{-1}$ a inversa de $\mathbf{f}_{|V}$. Dado que $\mathbf{f}(-1,0) = (1,0)$, vem

$$D\mathbf{f}^{-1}(1,0) = D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(-1,0)) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

8. Seja $\mathbf{f} :]0,\infty[\times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{f}(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z).$$

(a) Mostre que $\mathbf{f}$ é *localmente invertível*, i.e., que dado um ponto qualquer $\mathbf{x}_0 \in]0,\infty[\times \mathbb{R}^2$ existe uma vizinhança $V \ni \mathbf{x}_0$ na qual $\mathbf{f}$ é invertível.

(b) Será $\mathbf{f}$ globalmente invertível? Justifique.

(c) Sendo $(x,y,z) = \mathbf{f}(r,\theta,z)$, calcule $D\mathbf{f}^{-1}(x,y,z)$.

Resolução:

(a)

$$Jf(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \neq 0, \qquad \forall (r,\theta,z) \in]0,\infty[\times\mathbb{R}^2$$

Pelo Teorema da Função Inversa, $\mathbf{f}$ é localmente invertível em $]0,\infty[\times\mathbb{R}^2$.

(b) $\mathbf{f}$ não é globalmente invertível pois não é injectiva: $\mathbf{f}(r,\theta,z) = \mathbf{f}(r,\theta+2\pi,z)$.

(c) Seja V uma vizinhança de (r,θ,z) na qual $\mathbf{f}$ é invertível e seja $\mathbf{f}^{-1}$ a inversa de $\mathbf{f}_{|V}$. Temos

$$D\mathbf{f}^{-1}(x,y,z)) = (D\mathbf{f}(r,\theta,z))^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ -\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Considere a função $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y,z) = (x^2+y^2)^2 - z^2.$$

(a) Quais os pontos da superfície de nível $F^{-1}(0)$ em que o Teorema da Função Implícita não garante a existência de uma vizinhança na qual o conjunto é da forma $z = f(x,y)$?

(b) Esboce o conjunto de nível $F^{-1}(0)$. O que pode dizer sobre os pontos que determinou na alínea anterior?

(c) Seja f a função cujo gráfico descreve $F^{-1}(0)$ numa vizinhança do ponto $(1,0,1)$. Calcule $Df(1,0)$.

Resolução:

(a)

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 0 \\ F(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2z = 0 \\ F(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z) = \mathbf{0}$$

O Teorema da Função Implícita não garante a existência de uma vizinhança de $\mathbf{0}$ na qual o conjunto é da forma $z = f(x,y)$.

(b) O conjunto de nível $F^{-1}(0)$ não é o gráfico de uma função $z = f(x,y)$ em nenhuma vizinhança de $\mathbf{0}$.

(c) Resolvendo a equação

$$\frac{\partial F}{\partial x \partial y}(1,0,1) + \frac{\partial F}{\partial z}(1,0,1) Df(1,0) = 0$$

obtemos $Df(1,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$.

10. Um Airbus A340 voa a 900 kmh^{-1} num corredor Este-Oeste, a 10000 m de altitude, enquanto um Boeing 777 segue a 800 kmh^{-1} num corredor Sul-Norte, a 11000 m de altitude. Determine a velocidade de aproximação dos dois aviões (ou seja, a taxa de variação da distância entre os aviões), quando o A340 e o 777 se encontram a 300 km e 400 km, respectivamente, dos pontos em que os corredores estão mais próximos.

Sugestão: tente resolver o problema sem parametrizar as trajectórias dos aviões.

Resolução: Consideremos um referencial com origem no ponto em que os corredores estão mais próximos. Sejam (x_A, y_A, z_A) e (x_B, y_B, z_B), respectivamente, as posições do Airbus e do Boeing e seja d a distância entre os aviões. Temos,

$$d^2 = x_A^2 + y_B^2 + (z_A - z_B)^2,$$

logo,

$$d' = \frac{x'_A x_A + y'_B y_B}{d}.$$

Portanto, no ponto em causa, a velocidade de aproximação, d', é dada por

$$d' = \frac{-900 \times 300 - 800 \times 400}{500} = -1180\,\mathrm{kmh}^{-1}\,.$$