1^{a} Ficha de Exercícios de AMIII

Para entregar na aula teórica de 4/10/02

1. Sejam $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ e $g(r,\theta) = f(x,y)$.
   (a) Exprima $\frac{\partial g}{\partial r}$ e $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ em função das derivadas parciais de f.
   (b) Mostre que
   $$\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$
2. Seja $g(x,y) = f(x+y, e^{xy})$. Calcule a derivada parcial $D_{12}g$ em função das derivadas parciais de f (recorde que $D_{12}g := \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$).
3. Determine e classifique os pontos críticos das funções seguintes:
   (a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + 7$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
   (b) $f(x,y) = (x - y + 1)^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
   (c) $\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{ch}(y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (recorde que $\mathrm{ch}\, y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$)
4. Sejam $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$. Determine o mínimo e o ponto de mínimo da função $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_i||^2$.
5. *Método dos mínimos quadrados.* Dados n números reais distintos $x_1, \ldots, x_n$ e n números reais $y_1, \ldots, y_n$ (não necessariamente distintos) é, em geral, impossível encontrar uma recta $y = ax + b$ que passe por todos os pontos (x_i, y_i), para $i = 1, \ldots, n$. No entanto, é possível determinar a função linear $f(x) = ax + b$ que minimiza a soma dos quadrados dos erros
   $$E(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - y_i\right)^2 .$$
   Determine os números a e b que satisfazem esta condição.
6. Determine os extremos da função $f(x,y) = x^2 e^{-x^4 - y^2}$ em $\mathbb{R}^2$. Justifique a sua resposta.
7. Seja $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por
   $$\mathbf{f}(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$
   (a) Mostre que **f** é localmente invertível em $\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$, i.e., que dado um ponto qualquer $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$ existe uma vizinhança $V \ni \mathbf{x}_0$ na qual $\mathbf{f}$ é invertível.
   (b) Será **f** globalmente invertível? Justifique.

(c) Calcule $D\mathbf{f}^{-1}(1,0)$.

8. Seja $\mathbf{f} :]0,\infty[\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{f}(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z).$$

   (a) Mostre que **f** é *localmente invertível*, i.e., que dado um ponto qualquer $\mathbf{x}_0 \in]0,\infty[\times\mathbb{R}^2$ existe uma vizinhança $V \ni \mathbf{x}_0$ na qual $\mathbf{f}$ é invertível.

   (b) Será **f** globalmente invertível? Justifique.

   (c) Sendo $(x,y,z) = \mathbf{f}(r,\theta,z)$, calcule $D\mathbf{f}^{-1}(x,y,z)$.

9. Considere a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y,z) = (x^2+y^2)^2 - z^2.$$

   (a) Quais os pontos da superfície de nível $F^{-1}(0)$ em que o Teorema da Função Implícita não garante a existência de uma vizinhança na qual o conjunto é da forma $z = f(x,y)$?

   (b) Esboce o conjunto de nível $F^{-1}(0)$. O que pode dizer sobre os pontos que determinou na alínea anterior?

   (c) Seja f a função cujo gráfico descreve $F^{-1}(0)$ numa vizinhança do ponto $(1,0,1)$. Calcule $Df(1,0)$.

10. Um Airbus A340 voa a 900 km/h num corredor Este-Oeste, a 10000 m de altitude, enquanto um Boeing 777 segue a 800 km/h num corredor Sul-Norte, a 11000 m de altitude. Determine a velocidade de aproximação dos dois aviões (ou seja, a taxa de variação da distância entre os aviões), quando o A340 e o 777 se encontram a 300 km e 400 km, respectivamente, dos pontos em que os corredores estão mais próximos.

    Sugestão: tente resolver o problema sem parametrizar as trajectórias dos aviões.