

Análise Matemática III

1º semestre de 2001/02

Exercício Teste 6

A menina Lucialima tem um esquilo de que gosta muito e que trata ternurentamente por “tiquinho Gaudêncio”. Uma das brincadeiras favoritas deste nosso par de heróis, sobretudo em dias de chuva como este, é a de fazer uma corrida em que a menina Lucialima corre pela escada abaixo enquanto o “tiquinho” escorrega pelo corrimão abanando a cauda.

O corrimão (fino) da escada tem a forma da curva

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, z = \frac{\sqrt{5}}{2}y, 0 \leq y \leq 2, x \geq 0 \right\}$$

- Determine a massa do corrimão sabendo que a densidade de massa por unidade de comprimento é $\sigma(x, y, z) = x + y$.
- Determine o centro de massa $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ do corrimão.
- O Sr. Gaudêncio adora engenhocas e montou as escadas numa plataforma giratória que roda em torno do eixo $L = Oz$. É por isso importante conhecer o momento de inércia, I_L , do corrimão em relação a esse eixo. Determine I_L .

Resolução:

- Uma parametrização do corrimão é dada por,

$$g : \begin{cases} x = 3 \cos(\theta) \\ y = 2 \operatorname{sen}(\theta) \\ z = \sqrt{5} \operatorname{sen}(\theta) \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

pelo que

$$g'(\theta) = (-3 \operatorname{sen}(\theta), 2 \cos(\theta), \sqrt{5} \cos(\theta))$$

e

$$\|g'(\theta)\| = \sqrt{9\operatorname{sen}^2(\theta) + 4\cos^2(\theta) + 5\cos^2(\theta)} = 3.$$

A massa é então,

$$\begin{aligned} M &= \int_C \sigma = \int_0^{\pi/2} (3\cos(\theta) + 2\operatorname{sen}(\theta)) 3d\theta = \\ &= (9\operatorname{sen}(\theta) - 6\cos(\theta))_0^{\pi/2} = 15 \end{aligned}$$

- O centro de massa tem coordenadas dadas por

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{M} \int_C x\sigma = \frac{1}{15} \int_0^{\pi/2} 3\cos(\theta) (3\cos(\theta) + 2\operatorname{sen}(\theta)) 3d\theta = \\ &= \frac{9}{5} \int_0^{\pi/2} \cos^2(\theta)d\theta + \frac{6}{5} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)d\theta = \frac{9\pi}{20} + \frac{3}{5} \cong 2.01, \end{aligned}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \int_C y \sigma = \frac{1}{15} \int_0^{\pi/2} 2\text{sen}(\theta) (3\cos(\theta) + 2\text{sen}(\theta)) 3d\theta = \frac{3}{5} + \frac{\pi}{5} \cong 1.23,$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \int_C z \sigma = \frac{\sqrt{5}}{2} \bar{y} = \sqrt{5} \frac{\pi + 3}{10} \cong 1.37$$

c) Para o momento de inércia em relação ao eixo Oz temos

$$\begin{aligned} I_L = \int_C d^2\sigma &= \int_0^{\pi/2} (9\cos^2(\theta) + 4\text{sen}^2(\theta)) (3\cos(\theta) + 2\text{sen}(\theta)) 3d\theta \\ &= 3 \int_0^{\pi/2} (5\cos^2(\theta) + 4) 2\text{sen}(\theta) d\theta + 3 \int_0^{\pi/2} (9 - 5\text{sen}^2(\theta)) 3\cos(\theta) d\theta = \\ &= 6 \int_0^1 (5u^2 + 4) du + 9 \int_0^1 (9 - 5v^2) dv = 100. \end{aligned}$$