

Análise Matemática III

1º semestre de 2001/02

Exercício Teste 13

No ano 2150 o trânsito em Lisboa tornou-se caótico ! Na verdade, é preciso recuar ao longínquo ano de 2113 — ano em que o automóvel foi finalmente substituído pelo disco voador — para encontrar congestionamentos desta magnitude.

Para obviar a esta grave situação, o presidente da edilidade alfacinha, Celestino Gaudêncio, decidiu levar a cabo uma alteração dos sentidos do trânsito em algumas das principais artérias da cidade de Ulisses. No ponto de confluência de todas as vias afectadas está o conhecido “Hiperbolóide de Pombal”, onde os técnicos camarários esperavam que viessem a sentir-se melhorias imediatas na circulação, enquanto os adversários de Celestino previam que viesse a dar-se um estrangulamento do tráfego que provocasse o estrangulamento político do conhecido autarca.

À hora de ponta do dia de entrada em funcionamento do novo esquema de trânsito, Celestino decidiu enviar para o “Hiperbolóide de Pombal” o mais qualificado agente da divisão de trânsito da polícia, Firmino Gaudêncio¹, a fim de aferir o sucesso do mesmo. O Agente Gaudêncio — como Firmino é conhecido nos meios policiais — destacou-se na Academia de Polícia por ter tido 20 valores no exame de AMIII, que desde há muitos anos é obrigatório para aceder à divisão de trânsito. Trinta segundos depois de chegar ao local, Firmino já tinha a resposta para as interrogações do seu primo.

Sabendo que o “Hiperbolóide de Pombal” — esse ex-líbris da cidade de Lisboa — tem a forma do conjunto

$$\text{HP} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2, -1 < z < 1\},$$

que as densidades de fluxo do trânsito, antes e depois da entrada em vigor das medidas de Celestino, são dadas por

$$f_{ac}(x, y, z) = 10^5(x, -y, -z)$$

e

$$f_{dc}(x, y, z) = f_{ac}(x, y, z) + (1, -1, 2x - 2y),$$

respectivamente, determine os valores obtidos pelo Agente Gaudêncio para o número discos voadores que saem do “Hiperbolóide de Pombal” por unidade de tempo (*i.e.* calcule o fluxo do campo):

- antes das medidas de Celestino, usando o teorema da divergência;
- depois das medidas de Celestino, usando o resultado de (a) e o teorema de Stokes.

¹seu primo direito