

Análise Matemática III

1º semestre de 2001/02

Exercício 10

Feriado Gaudêncio é irmão de Marcelino Gaudêncio, e também não tem tido uma vida nada fácil. Em boa verdade, Feriado é um encenador falhado do teatro de revista. Com o intuito de ajudar o irmão a ultrapassar uma difícil crise de meia idade aos 30 anos – após mais uma produção fracassada no parque Mayer – Marcelino convidou-o para encenar um espectáculo inovador com o seu famoso circo de formigas amestradas. O espectáculo consistia em pôr as formigas esquiar a uma velocidade alucinante ao longo de uma rampa com a forma do conjunto

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x \operatorname{tg}(z), -\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Colocado perante esta proposta, Feriado teve uma daquelas reacções desencorajadoras que o caracterizam, perguntando:

– Mano, tens a certeza que isto é um número de variedades ?

- (a) Ajude Marcelino a sossegar o irmão, mostrando que M é uma variedade de dimensão 2.
- (b) Determine os pontos p em que M é vertical ¹. Ou seja, determine os pontos p tais que $T_p M$ contém o vector $(0, 0, 1)$.

Solução:

- (a) Seja $f : \mathbb{R} \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ a função de classe C^1 , definida por $f(x, z) = x \operatorname{tg}(z)$. Notando que M é o gráfico de f :

$$M = \left\{ (x, f(x, z), z) : (x, z) \in \mathbb{R} \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right\},$$

conclui-se que M é uma variedade de dimensão 2.

Em alternativa, M é uma variedade de dimensão 2 pois é o conjunto de nível zero da função de classe C^1 , $F(x, y, z) = y - x \operatorname{tg} z$:

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0 \right\},$$

e a matriz $DF(x, y, z) = (-\operatorname{tg} z \quad 1 \quad -x \sec^2 z)$ tem característica máxima (igual a 1) em todos os pontos de M .

- (b) Pretende-se determinar o conjunto dos pontos $p \in M$ tais que $(0, 0, 1) \in T_p M$. Ora, de acordo com a resposta a (a), o espaço ortogonal a M em $p = (x, y, z)$ é gerado pelo vector $(-\operatorname{tg} z, 1, -x \sec^2 z)$. Tem-se

$$(0, 0, 1) \in T_p M \Leftrightarrow (0, 0, 1) \cdot (-\operatorname{tg} z, 1, -x \sec^2 z) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

portanto o conjunto dos pontos onde M é vertical é

$$\{(x, y, z) \in M : x = 0\} = \left\{ (0, 0, z) : -\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

¹A resposta é relevante para a escolha da iluminação do espectáculo