Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º Teste de Álgebra

2 de Novembro de 2004

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Duração: 1 hora e 30 minutos.

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. (**1.5**) Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Recorde que $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ é *inicial* se $\forall C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\# \hom_{\mathcal{C}}(A, C) = 1$. Mostre que se $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ são iniciais então $A \cong B$.

2. (**2.5**) Seja M um grupo abeliano. Mostre que

$$(M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2) \oplus (M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_3) \cong M/(6 \cdot M).$$

3. Seja A um anel e seja M um A-módulo.

(a) (**1.0**) Defina $\mathrm{Torc}(M)$.

(b) (**1.5**) Mostre que se, A é um domínio integral, $\mathrm{Torc}(M)$ é um submódulo de M.

4. (**3.5**) Seja $G = \mathbb{Z}^3/(\mathbb{Z}v_1 + \mathbb{Z}v_2 + \mathbb{Z}v_3)$ onde $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}$ e $v_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$. Escreva G como uma soma directa de grupos cíclicos.

5. Seja A um anel. Um A-módulo P diz-se *projectivo* se, para todo o homomorfismo sobrejectivo de A-módulos $\pi \colon M \to N$, e todo o homomorfismo de A-módulos $f \colon P \to N$ existe $g \in \hom_A(P, M)$ tal que $f = \pi \circ g$:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\pi"] \\ P \arrow[ur, dashed, "\exists g"] \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

Mostre que

(a) (**2.5**) todo o A-módulo livre é projectivo;

(b) (**2.5**) se P é projectivo, então toda a sucessão exacta

$$0 \to M' \to M \xrightarrow{\pi} P \to 0$$

se cinde;

(c) (**2.5**) se P é projectivo, então P é um somando directo de um A-módulo livre;

(d) (**2.5**) se P é projectivo e A é um *domínio de ideais principais*, então P é livre.

TPC: Mostre que: P é projectivo $\Leftrightarrow$ toda a sucessão em (b) se cinde $\Leftrightarrow$ P é um somando directo de um A-módulo livre.