Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Álgebra II – Teste Tipo

Dezembro de 2003

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. (a) [**1**] Seja G um grupo tal que $G/C(G)$ é cíclico. Mostre que G é abeliano.

(b) [**1.5**] Seja G um grupo de ordem p^2 (com p primo). Mostre que G é abeliano.

2. [**3**] Seja G um grupo de ordem pq, onde p, q são primos. Mostre que G não é simples.

3. [**3**] Mostre que se um grupo finito G é um produto directo de subgrupos de Sylow então G é nilpotente.

4. [**2.5**] Seja E/k uma extensão de corpos. Mostre que E/k é algébrica sse, para toda a subextensão F/k, todo o k-homomorfismo $\sigma\colon F \to F$ é um automorfismo de F.

5. [**3**] Determine o grupo de Galois de $f(x) = (x^2 + 3)(x^5 - 1)$ sobre $\mathbb{Q}$.

6. [**3**] Seja k um corpo de característica $p > 0$. Mostre que $f(x) = x^{p^s} - a$ é irredutível se $a \notin k^p$.

Sugestão: Seja α uma raíz de f numa extensão de decomposição. Mostre que $p^s = \min\{i \mid \alpha^i \in k\}$.

7. [**3**] Sejam E/k e F/k extensões contidas numa extensão comum L/k. Mostre que, se E/k é extensão de Galois, então EF/F, $E/E \cap F$ também o são, e a aplicação

$$\sigma \mapsto \sigma|_E\colon \operatorname{Gal}(EF/F) \to \operatorname{Gal}(E/E \cap F)$$

é um isomorfismo.