Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Álgebra II – 1º Teste

4 de Novembro de 2003

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. [**2.5**] Seja A um anel e seja $0 \to M \to N \to P \to 0$ uma sucessão exacta de A-módulos tal que P é livre. Mostre que a sucessão se cinde.

2. Seja A um anel comutativo e seja M um A-módulo. Recorde que $M^* := \hom_A(M, A)$ é um A-módulo. Mostre que:

(a) [**2.5**] se $\{N_i\}_{i\in I}$ é um conjunto de A-módulos então $\left(\bigoplus_{i\in I} N_i\right)^* \cong \prod_{i\in I} N_i^*$;

(b) [**2.5**] se M é livre de dimensão finita então M^* é livre com a mesma dimensão.

3. [**2.5**] Seja M um grupo abeliano. Mostre que $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_m \cong M/mM$ (como grupos abelianos).

4. [**2.5**] Mostre que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$ (como grupos abelianos).

5. [**2.5**] Determine se os grupos abelianos $\mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_{24}$ e $\mathbb{Z}_{50} \oplus \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_8$ são isomorfos.

6. [**2.5**] Sejam G_1 e G_2 grupos abelianos finitos tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$, G_1 e G_2 têm o mesmo número de elementos de ordem n. Mostre que $G_1 \cong G_2$.

Sugestão: Comece por reduzir ao caso em que $|G_1| = |G_2| = p^m$ com $p \in \mathbb{N}$ primo e $m \in \mathbb{N}$.

7. [**2.5**] Seja $p \in \mathbb{N}$ um primo. Mostre que as seguintes matrizes de $M_p(\mathbb{Z}_p)$ são semelhantes:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sugestão: Note que $x^p - 1 = (x-1)^p$ em $\mathbb{Z}_p[x]$.