

ANÁLISE COMPLEXA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

TESTE 1 - 3 DE NOVEMBRO DE 2007 - DAS 9H ÀS 10:30H

Resolução Sumária

1. Seja  $f(x + iy) = \cos(x) \operatorname{ch}(y) - i \operatorname{sen}(x) \operatorname{sh}(y)$ .

[1 val.] (a) Mostre que  $f$  é analítica em  $\mathbb{C}$ .

Res: Uma condição necessária para que  $f$  seja analítica em  $\mathbb{C}$  é que verifique as condições de Cauchy-Riemann em  $\mathbb{C}$ . De facto, tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\operatorname{sen}(x) \operatorname{ch}(y) = \frac{\partial v}{\partial y},$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos(x) \operatorname{sh}(y) = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Por outro lado, as funções  $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , têm derivadas parciais contínuas em  $\mathbb{R}^2$  o que conjuntamente com as condições de Cauchy-Riemann garante que  $f = u + iv$  é analítica em  $\mathbb{C}$ .

[1 val.] (b) Calcule  $\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^2} dz$ .

Res: Pela alínea anterior, e atendendo à fórmula integral de Cauchy para a 1ª derivada, temos que:

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^2} dz &= 2\pi i f'(0) = 2\pi i \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right]_{(x,y)=(0,0)} \\ &= 2\pi i [-\operatorname{sen}(x) \operatorname{ch}(y) - i \cos(x) \operatorname{sh}(y)]_{(x,y)=(0,0)} \\ &= 2\pi i [0 + 0i] = 0. \end{aligned}$$

[1 val.] 2. Calcule a série de Taylor de  $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$  em torno de  $z_0 = 1$  e determine o seu raio de convergência.

Res: Como

$$\frac{1}{(z+1)(z+2)} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2},$$

e

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1 - \left(-\frac{z-1}{2}\right)} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}},$$

desenvolvimento válido para  $|z-1| < 2$ , e, similarmente

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{1 - \left(-\frac{z-1}{3}\right)} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{3^{n+1}},$$

desenvolvimento válido para  $|z-1| < 3$ , concluímos que o raio de convergência da série pedida é 2 e esta é:

$$\frac{1}{(z+1)(z+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right] (z-1)^n, \quad \text{para } |z-1| < 2.$$

3. Considere a função  $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$  definida em  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ .

(a) Determine o desenvolvimento de  $f$  em série de Laurent válido para  $0 < |z| < 1$ . [1

Res: Tendo em conta que

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

para  $|z| < 1$ , logo se conclui que:

$$\frac{1}{z^2(1-z)} = z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-2},$$

desenvolvimento válido para  $0 < |z| < 1$ .

(b) Determine o desenvolvimento de  $f$  em série de Laurent válido para  $1 < |z| < \infty$ . [1

Res: Tendo em conta que

$$\frac{1}{z^2(1-z)} = -z^{-2} \frac{1}{1-\frac{1}{z}},$$

para  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , o desenvolvimento pedido é

$$\frac{1}{z^2(1-z)} = -z^{-2} \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = - \sum_{n=0}^{\infty} z^{-(n+3)},$$

para  $|\frac{1}{z}| < 1 \equiv |z| > 1$ .

(c) Utilize os resultados das alíneas anteriores para calcular [1

$$\oint_{|z|=2} f(z) dz.$$

Res: O desenvolvimento obtido na alínea 3.b) é válido para  $1 < |z| < \infty$  e o contorno  $C = \{|z| = 2\}$  está contido nessa região (onde  $f$  é analítica). Os coeficientes desse desenvolvimento são dados por:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz,$$

para  $n \in \mathbb{Z}$ .

Em particular, o coeficiente  $a_{-1}$  da série calculada em 3.b) dá-nos (a menos de  $2\pi i$ ) o valor do integral pedido. Mas, como  $a_{-1} = 0$ , concluímos que  $\oint_{|z|=2} f(z) dz = 0$ .

4. Seja  $\gamma_R$  a curva fechada que limita o semicírculo

$$D_R = \{z = \rho e^{i\theta} : 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi\},$$

de raio  $R > 2$ , percorrida no sentido positivo.

(a) Calcule o integral

$$\oint_{\gamma_R} \frac{dz}{(z^2 + 4)^2}.$$

Res: A função integranda  $f$  tem duas singularidades ( $z = -2i, z = 2i$ ). Como  $R > 2$  a singularidade  $z = 2i$  está contida na região delimitada por  $\gamma_R$  e conseqüentemente, pelo Teorema dos resíduos:

$$\oint_{\gamma_R} \frac{dz}{(z^2 + 4)^2} = 2\pi i \operatorname{res} f(z = 2i).$$

Uma vez que  $1/f = (z^2 + 4)^2 = (z + 2i)^2(z - 2i)^2$  tem zero duplo em  $z = 2i$  segue que  $f$  tem um pólo duplo em  $z = 2i$  e portanto

$$\operatorname{Res} f(z = 2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d}{dz} [(z - 2i)^2 f(z)] = \frac{2}{4^3 i}.$$

Então,

$$\oint_{\gamma_R} \frac{dz}{(z^2 + 4)^2} = \frac{\pi}{16}.$$

[2 val.]

(b) Calcule o integral real

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} dx.$$

Res: Atendendo ao facto de termos uma integranda par,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} dx.$$

Seja  $C_R = \{z = Re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$ , percorrida no sentido positivo. Podemos então escrever:

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{(z^2 + 4)^2} = \int_{C_R} \frac{dz}{(z^2 + 4)^2} + \int_{I_R} \frac{dz}{(z^2 + 4)^2} = \frac{\pi}{16}.$$

para qualquer  $R > 2$ . Como

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} \frac{dz}{(z^2 + 4)^2} = 0,$$

uma vez que a integranda é uma função racional e o grau do polinómio do denominador (4) é maior ou igual que o grau do polinómio do numerador (0) mais 2, temos, passando ao limite na igualdade acima e tendo em conta a definição de integral impróprio, que

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} dx = \frac{1}{32}.$$

[1 val.]

5. Seja  $\Omega$  uma vizinhança de 0, e seja  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica com um zero de ordem 3 em  $z = 0$ . Mostre que, para  $\delta$  suficientemente pequeno, se tem

$$\oint_{|z|=\delta} \frac{dz}{f(z)} = \pi i \left( \frac{2(g'(0))^2 - g''(0)g(0)}{g^3(0)} \right)$$

onde  $g(z) = f(z)/z^3$ .

Res: Uma vez que  $f$  tem um zero de ordem 3 em  $z = 0$ , é claro que  $\frac{1}{f}$  tem nesse ponto uma singularidade isolada, mais precisamente um pólo de ordem 3.

Seja  $\delta > 0$  suficientemente pequeno por forma a que  $z = 0$  seja a única singularidade de  $\frac{1}{f}$  contida no disco  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = \delta\}$ . Então pelo Teorema dos resíduos temos que

$$\oint_{|z|=\delta} \frac{dz}{f(z)} = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{1}{f} \right)_{z=0}.$$

Atendendo ao facto de  $z = 0$  ser um pólo de ordem 3 de  $\frac{1}{f}$ , concluímos que

$$\oint_{|z|=\delta} \frac{dz}{f(z)} = 2\pi i \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} \left[ \frac{z^3}{f} \right] = \pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} \left[ \frac{1}{g} \right].$$

Derivando duas vezes  $\frac{1}{g}$  e passando ao limite quando  $z \rightarrow 0$  (e tendo em conta que esta derivada é contínua), obtemos imediatamente o resultado.